

HOCHHEIM

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

II

B: AUFLÖSUNGEN



Von dem Verfasser sind ferner erschienen:

Im Verlage von **B. G. Teubner**, Leipzig:

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. In je 2 Teilen (Aufgaben und Auflösungen). gr. 8.

Heft I. **Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis.** 3., verm. Auflage. 1904.
— II. **Die Kegelschnitte.** Abteilung I. 2., vom Verfasser selbst noch bearbeitete Auflage. 1898.
— III. **Die Kegelschnitte.** Abteilung II. 1886.

Im Verlage von **E. S. Mittler & Sohn**, Berlin:

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. I. Heft. 6. Aufl. ed. F. Hochheim. 1900. — II. Heft. 2. Aufl. 1884.

Bei **C. Schmidt**, Halle a. S.:

De genere quodam curvarum orthogonalium. gr. 4. 1864.

Im Verlage von **L. Nebert**, Halle a. S.:

Die Differentialkurven der Kegelschnitte. gr. 8. 1874.

Pole und Polaren der parabolischen Kurven 3. Ordnung. gr. 4. 1875.

Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des **Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî** nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schloßbibliothek befindlichen Handschrift. gr. 4. In 3 Heften. 1878—1880.

Als Programmabhandlungen der Guerickeschule in Magdeburg:

Otto von Guericke als Physiker. gr. 4. 1870.

Über die windschiefe Fläche $z = Ry^3x$. gr. 4. 1873.

In Grunerts Archiv für Mathematik und Physik:

Über einige Kurven höheren Grades.

Ein Problem aus der Optik (Problem des Alhazen).

Über eine Brechungskurve.

Über den fünften merkwürdigen Punkt.

Über die windschiefe Fläche $z = My^2x$.

Über die windschiefe Fläche $z = A\frac{y^2}{x^2}$.

Über die gemischte Polokonik zweier Geraden bezüglich der Differentialkurve der Parabel.

Über die Brennpunkte der Differentialkurve der Parabel.

Über die reziproke Polare der Differentialkurve der Parabel in bezug auf einen Kreis.

Über figurierte Zahlen.

In Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik:

Über die geometrischen Örter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Tangentialkurven der Kegelschnitte.

Über die Polarflächen der windschiefen Flächen 3. Ordnung.

In den Jahrbüchern des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg:

Die geometrische Reihe 2. Ordnung in 2 Teilen (1886 u. 1887).

In der Zeitschr. der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft:

Die Astronomie des Mahmûd ibn Muhammed ibn ʿOmar al Ǵagmînî von G. Rudloff u. Ad. Hochheim (1893).

Von dem Herausgeber erschien im Verlage von **B. G. Teubner**, Leipzig:

Über eine Art der Erzeugung der Kurven 3. Klasse mit einer Doppeltangente. gr. 8. 1899.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

PROFESSOR DR. ADOLF HOCHHEIM,

WEIL. KÖNIGL. PROVINZIAL-SCHULRAT ZU BERLIN.

HEFT IIb

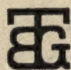
DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG I.

ZWEITE, VOM VERFASSER SELBST NOCH BEARBEITETE AUFLAGE.

B. AUFLÖSUNGEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.



Die Parabel.

1. Da nach der Aufgabe die Koordinaten des Punktes P der Relation $x + \frac{p}{4} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2}$ genügen müssen, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes $y^2 = px$.

2. $y^2 = 17x$.

3. $(y - b)^2 = \pm p\,(x - a)$.

Beispiel. $2y^2 + 12y - 11x + 73 = 0$ oder
$2y^2 + 12y + 11x - 37 = 0$.

4. $(y + 7)^2 = 4\,(x - 3)$.

5. Der Parameter ist $p = \frac{6}{7}$, die Koordinaten des Scheitels sind: $x_1 = -2$, $y_1 = \frac{7}{4}$, die des Brennpunktes: $x_2 = -1\frac{11}{14}$, $y_2 = \frac{7}{4}$.

6. Die Parabel geht über in eine Doppelgerade, welche mit der X-Achse zusammenfällt.

7. Sie sind kongruent.

8. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_{\substack{2\\3}} = \frac{p}{q^2}$, $y_{\substack{2\\3}} = \pm \frac{p}{q}$.

Beispiele. a) $x_{\substack{2\\3}} = \frac{9}{25}$, $y_{\substack{2\\3}} = \pm 1\frac{4}{5}$;
b) $x_{\substack{2\\3}} = 68$, $y_{\substack{2\\3}} = \pm 34$.

9. $31y \mp 12\sqrt{5}x \pm 15\sqrt{5} = 0$; $d = 10{,}25$.

10. $y_1^2 - 10\sqrt{2}y_1 = 20x_1$.

11. $\varrho = \dfrac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\vartheta}$ oder $\varrho = \dfrac{p}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$.

12. Soll $\varrho = p$ sein, so muß $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}$, also $\angle\,\vartheta = 60^0$ sein. Einen Minimalwert besitzt ϱ für $\angle\,\vartheta = 180^0$, da der Nenner des Bruches $\dfrac{p}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$ in diesem Falle ein Maximum ist. Durch Einsetzung von $\vartheta = 180^0$ erhält man $\varrho = \frac{p}{4}$.

13. Man erhält a) für $\angle\vartheta = 45^0$, $\varrho = 10{,}24264$,
b) „ $\angle\vartheta = 60^0$, $\varrho = 6$.

14. Es ist $\varrho_1 = \frac{p}{2(1-\cos\varphi)}$, $\varrho_2 = \frac{p}{2(1+\cos\varphi)}$, also
$\varrho_1 + \varrho_2 = s = \frac{p}{\sin^2\varphi}$.

Beispiel. $s = 119{,}6808$.

15. Es ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p^2}{4\sin^2\varphi} = \frac{p}{4} \cdot s$.

Das Rechteck aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Parabel ist demnach gleich dem aus der ganzen Sehne und dem Abstande des Brennpunktes vom Scheitel.

16. Nach der vorigen Lösung ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p^2}{4\sin^2\vartheta}$, also $\varrho_1 \sin\vartheta \cdot \varrho_2 \sin\vartheta = y_1 \cdot y_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, d. h. das Rechteck aus den beiden Loten, welche von den Endpunkten einer Brennpunktsehne auf die Achse gefällt sind, ist gleich dem Quadrate über der Hälfte des Parameters.

17. Die Parabel wird von der Geraden in zwei Punkten geschnitten, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - 2Mn \pm \sqrt{p(p - 4Mn)}}{2M^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 4Mn)}}{2M}.$$

Für $p > 4Mn$ schneidet die Gerade die Parabel in zwei reellen Punkten, für $p = 4Mn$ fallen beide Schnittpunkte zusammen; die Gerade ist also eine Tangente der Parabel. Ist $p < 4Mn$, so sind die beiden Schnittpunkte imaginär.

Beispiele. a) $x_1 = 4$, $y_1 = 6$;
$x_2 = 25$, $y_2 = 15$.

b) Die Gerade berührt die Parabel in dem Punkte
$x_1 = 12$, $y_1 = 6$.

c) Die Gerade schneidet die Parabel in zwei imaginären Punkten

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-1165 \mp 5i\sqrt{28655}}{288},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{-55 \pm i\sqrt{28655}}{24}.$$

18. Errichtet man auf einer Geraden in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente der Parabel ein Lot, so schneidet dieses die Achse in der Entfernung Mn vom Scheitel. Daraus folgt: Eine Gerade schneidet die Parabel in zwei reellen Punkten, oder berührt sie, oder schneidet dieselbe in zwei imaginären Punkten, wenn das auf ihr in ihrem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente errichtete Lot die Achse diesseit des Brennpunktes (d. h. auf der Seite, wo der Scheitel liegt) oder im Brennpunkte oder jenseit des Brennpunktes schneidet.

19. Die Gerade schneidet die Parabel nur in einem endlichen Punkte $x_1 = \frac{n^2}{p}$, $y_1 = n$; der zweite Schnittpunkt liegt in der Unendlichkeit. (Vergl. Lös. 17.)

20. Die Bedingungsgleichung $\frac{p}{4} v^2 - u = 0$ ist zugleich die Gleichung der Parabel in Linienkoordinaten.

21. $au^2 + buv - \frac{p}{4} v^2 + u = 0.$

22. Der Abstand des Punktes P von der Geraden g sei k. Betrachtet man g und das von P auf g gefällte Lot als Achsen, so ergiebt sich die Relation $v^2 k - u = 0$. Die Enveloppe der Lote ist also eine Parabel mit der Brennweite k.

23. Wird das von P auf g gefällte Lot als X-Achse, das den Abstand zwischen P und g halbierende Lot als Y-Achse betrachtet, so ist die Gleichung der einhüllenden Kurve

$$pv^2 - 4u = 0.$$

24. $pv^2 - 4u = 0.$ (Vergl. Lös. 23.)

25. $rv^2 + ru^2 - u = 0.$

26. $s = 22\sqrt{3}$; $h = 33.$

27. $x + y - 6 = 0.$

28. $y - y_1 = \frac{p}{2y_1}(x - x_1).$

Beispiel. $6y - 7x + 17 = 0.$

29. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_1 = -\tfrac{3}{2},\ y_1 = 6;\quad x_2 = 3\tfrac{3}{8},\ y_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Der Abstand ist $d = \frac{7}{15}$.

30. $(y \mp 6)^2 = 3x.$

31. $y = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + p\alpha}}{2\alpha} x.$

Beispiel. $y = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{16} x.$

32. Die Gleichung der Tangente ist

$$2yy_1 = p(x + x_1).$$

Beispiele. a) $4y - x - 20 = 0;$

b) $8y + 7 + 8 = 0.$

33. Die Gleichung der Normale ist

$$p(y - y_1) + 2y_1(x - x_1) = 0.$$

Beispiel. $3y - 10x + 295 = 0.$

34. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$2y - x - 23 = 0, \quad 2y + x + 11 = 0,$$

die Neigungswinkel derselben zur X-Achse:

$$\angle \varphi_1 = 26^0\,33'\,54{,}2'', \quad \angle \varphi_2 = 153^0\,26'\,5{,}8'',$$

die Gleichungen der Normalen:

$$y + 2x - 9 = 0, \quad y - 2x + 3 = 0.$$

35. Zur Bestimmung des Parameters ergiebt sich die Relation $\frac{pM^2}{4L^2} - \frac{N}{L} - a = 0$, demnach ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = \frac{4L(N + aL)}{M^2}(x - a).$$

Beispiel. $y^2 = \frac{549}{4}(x - 6).$

36. Man erhält:

$$\text{Tg} = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2} = \sqrt{x_1(p + 4x_1)};$$

$$\text{N} = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{p\left(x_1 + \frac{p}{4}\right)};$$

$$\text{Sbtg} = 2x_1; \qquad \text{Sbn} = \frac{p}{2}.$$

Beispiel. $\text{Tg} = \sqrt{266} = 16{,}3095\ldots,$

$\text{N} = \sqrt{95} = 9{,}74679\ldots,$

$\text{Sbtg} = 14, \ \text{Sbn} = 5.$

37. Schneidet man auf der Verlängerung der Achse über den Scheitel hinaus ein Stück ab, welches gleich der Abscisse des Punktes P ist, so ist der Endpunkt dieses Abschnittes ein zweiter Punkt der Tangente. Verlängert man dagegen die Ab-

scisse über den Fußpunkt der Ordinate hinaus um den halben Parameter, so erhält man einen zweiten Punkt der Normale.

38. Der Brennpunkt halbiert den Abstand der beiden Schnittpunkte; jeder der beiden Abschnitte ist gleich $x_1 + \frac{p}{4}$.

39. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind:

$$x_1 = \frac{p}{4\,\mathrm{tg}^2\varphi}, \quad y_1 = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 3\frac{3}{4}$, $y_1 = 7\frac{1}{2}$;

b) $x_1 = 0{,}916666\ldots$, $y_1 = -3{,}175428\ldots$

40. Die Abscisse des gesuchten Punktes ist

$$x_1 = -\tfrac{3}{4}p,$$

die Gleichung der Tangente

$$y\sqrt{3} - x - \tfrac{3}{4}p = 0.$$

41. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$\text{a)}\ x_{\frac{1}{2}} = -\frac{p}{8} \pm \frac{p}{8}\sqrt{17}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{\pm p}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}}.$$

Nur das positive Vorzeichen vor $\sqrt{17}$ ist brauchbar.

$$\text{b)}\ x_{\frac{1}{2}} = \frac{p}{12}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{2\sqrt{3}}.$$

42. Man erhält zwei Punkte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p(1+\sqrt{17})}{32}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{4}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}};$$

ferner ist $\mathrm{tg}\,\varphi = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$, also:

$$\angle\varphi_1 = 141^0\,19'\,55'', \quad \angle\varphi_2 = 38^0\,40'\,5''.$$

43. Außer den Koordinaten des Scheitels der Parabel genügen der Anforderung

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p}{4}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{2},$$

demnach ist $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm 1$, also:

$$\angle\varphi_1 = 45^0, \quad \angle\varphi_2 = 135^0.$$

44. Man findet:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_{\frac{2}{3}} = \tfrac{3}{4}p, \quad y_{\frac{2}{3}} = \pm\frac{p}{2}\sqrt{3}.$$

45. Beide Winkel sind Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, in dem jeder Schenkel gleich $x_1 + \frac{p}{4}$ ist.

46. Die geometrischen Örter sind:

a) die Scheiteltangente ($x = 0$),

b) die Direktrix $\left(x = -\frac{p}{4}\right)$.

47. Der geometrische Ort ist die Direktrix $x = -\frac{p}{4}$.

48. Mit Hilfe der Lösung 46 findet man leicht, daß beide Linien gleich sind.

49. Die Schnittpunkte liegen auf der Direktrix der Parabel $x = -\frac{p}{4}$.

50. Die Gleichung der Tangente ist $y = Mx + \frac{p}{4M}$, die Koordinaten des Berührungspunktes $x_1 = \frac{p}{4M^2}$, $y_1 = \frac{p}{2M}$.

Beispiel. $2y - 3x - 1\frac{2}{3} = 0$; $x_1 = \frac{5}{9}$, $y_1 = \frac{5}{3}$.

51. Die Gleichung der Tangente ist

$$y(M \operatorname{tg}\varphi + 1) - x(M - \operatorname{tg}\varphi) - p\frac{(M\operatorname{tg}\varphi + 1)^2}{4(M - \operatorname{tg}\varphi)} = 0;$$

die Koordinaten des Berührungspunktes

$$x_1 = \frac{p}{4}\left\{\frac{M\operatorname{tg}\varphi + 1}{M - \operatorname{tg}\varphi}\right\}^2, \quad y_1 = \frac{p}{2}\left\{\frac{M\operatorname{tg}\varphi + 1}{M - \operatorname{tg}\varphi}\right\}.$$

Beispiel. $2y - x - 12 = 0$, $x_1 = 12$, $y_1 = 12$.

52a. Man verbinde P mit dem Brennpunkte F und beschreibe über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis. Die Verbindungslinien des Punktes P mit den Schnittpunkten des Kreises und der Scheiteltangente sind die gesuchten Tangenten.

Determination. Man erhält im allgemeinen zwei Tangenten. Liegt der Punkt P in der Parabelfläche, so schneidet der Kreis die Scheiteltangente nicht, weil der Radius des Kreises kleiner ist als der Abstand des Mittelpunktes von der Scheiteltangente.

52b. Man verbinde P mit F und beschreibe mit dieser Strecke als Radius um P einen Kreis. Die Schnittpunkte dieses Kreises und der Direktrix lassen sich zur Konstruktion benutzen (s. Lös. 48). Die Determination ist leicht anzugeben.

53. $$d : N = \frac{\frac{p^2}{4} + px_1}{\sqrt{4y_1^2 + p^2}} : \sqrt{p\left(\frac{p}{4} + x_1\right)} = 1 : 2.$$

54. Eliminiert man aus den Gleichungen

$$y_1^2 = px_1, \qquad y_2^2 = px_2,$$
$$2yy_1 = p(x + x_1), \ 2yy_2 = p(x + x_2),$$
$$16y_1^2y_2^2 + 8p^2y_1y_2 + p^4 = 0,$$

die Größen x_1, y_1, x_2, y_2, so erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes $x = -\frac{p}{4}$. Der Scheitel des rechten Winkels beschreibt also die Direktrix.

55. Das Rechteck aus den beiden Subtangenten ist gleich dem Quadrate über dem halben Parameter, denn es ist

$$\frac{p}{2y_1} = -\frac{2y_2}{p}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 4x_1x_2.$$

56. Die Tangenten durchschneiden sich rechtwinklig.

57. Die Schnittpunkte liegen alle auf einer Geraden, deren Gleichung $y + x\operatorname{tg}\varphi + \frac{p}{4\operatorname{tg}\varphi} = 0$ ist. Weise nach, daß dieser geometrische Ort ebenfalls eine Tangente der Parabel ist.

58. Die Gleichung der Verbindungslinie ist

$$y\left(\frac{y_1y_2}{p} - \frac{p}{4}\right) - x\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \frac{p}{4}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

Dieselbe ist identisch mit der Gleichung

$$\frac{y\left(x_1 - \frac{p}{4}\right) - y_1\left(x - \frac{p}{4}\right)}{x_1 + \frac{p}{4}} + \frac{y\left(x_2 - \frac{p}{4}\right) - y_2\left(x - \frac{p}{4}\right)}{x_2 + \frac{p}{4}} = 0.$$

59. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind: $x = \sqrt{x_1x_2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, also:

$$x = -4, \quad y = -2{,}5;$$

der eingeschlossene Winkel:

$$\varphi = 55^0\, 13'\, 20''.$$

60. Bezeichnen wir den von den Tangenten eingeschlossenen Winkel mit φ_1, den von den Brennstrahlen gebildeten mit φ_2, so finden wir

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2p(y_2 - y_1)}{4y_1y_2 + p^2},$$

ferner

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{4p(y_2 - y_1)(4y_1y_2 + p^2)}{(4y_1y_2 + p^2)^2 - 4p^2(y_2 - y_1)^2},$$

also ist $\angle\varphi_2 = \angle 2\varphi_1$.

61. Man findet:

$$t_1^2 = (y_1 - y_2)^2 \left(\frac{x_1}{p} + \frac{1}{4}\right), \quad t_2^2 = (y_1 - y_2)^2 \left(\frac{x_2}{p} + \frac{1}{4}\right),$$

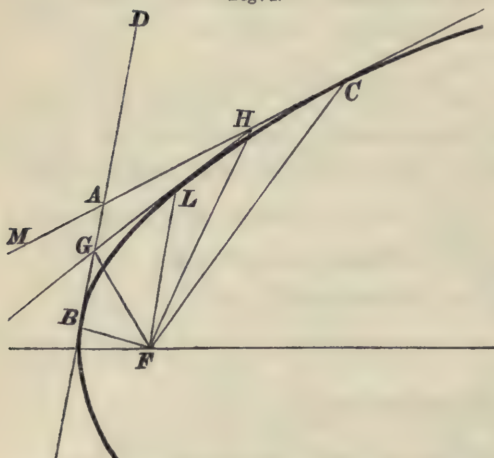
also ergiebt sich

$$t_1^2 : t_2^2 = x_1 + \frac{p}{4} : x_2 + \frac{p}{4}.$$

62. Nach Lösung 58 ist (s. Fig. 1)

$$\angle BFG = \angle GFL,$$

Fig. 1.



ferner

$$\angle CFH = \angle HFL,$$

demnach:

$$\angle GFH = \tfrac{1}{2} \angle BFC.$$

Der Winkel GFH behält daher dieselbe Größe, auch wenn der Punkt L auf der Parabel fortrückt.

63. Es seien A, G, H die Ecken des Tangentendreiecks (s. Fig. 1). Aus der Lösung der vorhergehenden Aufgabe folgt $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle BFC$. Nach Lösung 60 ist aber auch $\angle MAG = \frac{1}{2} \angle BFC$, demnach ist

$$\angle GAH + \angle GFH = 180^0,$$

also $AGFH$ ein Sehnenviereck. Daraus folgt: Beschreibt man um das Tangentendreieck AGH einen Kreis, so muß derselbe auch durch den Brennpunkt F gehen.

64. Nach einer der Aufgabe entsprechenden Abänderung der Fig. 1 findet man durch eine einfache geometrische Betrachtung, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen müssen.

65. $x_1 = 0, \ y_1 = 0; \ x_{2 \atop 3} = \frac{3}{4} p, \ y_{2 \atop 3} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{3}.$

66. Durch wiederholte Anwendung von Lösung 64 findet man: Die Geraden, welche die Ecken des gleichseitigen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden, schneiden sich im Brennpunkte der Parabel.

67. a) $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, $\angle\varphi_1 = 151^0\,29'\,18''$;

b) $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle\varphi_2 = 70^0\,53'\,36''$.

68. Der Parameter der gesuchten Parabel ergiebt sich nach Elimination von x_1 aus den beiden Gleichungen

$$x_1 + \frac{p}{2} - a = 0, \quad \frac{p}{2}x_1 = a(x_1 - a) + r^2.$$

Man erhält demnach:

$$y^2 = (2a \pm 2\sqrt{a^2 - r^2})\,x,$$

d. h. es existieren zwei Parabeln, welche der Anforderung genügen. Der gegebene Kreis wird nur von der Parabel $y^2 = (2a - 2\sqrt{a^2 - r^2})x$ in zwei reellen Punkten, von der andern Parabel dagegen in zwei imaginären Punkten berührt. Die Lösung ist nur möglich, wenn $a > r$ ist.

Beispiel. $y^2 = 50x$; $y^2 = 2x$.

69. Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes der Parabel, x_2, y_2 die des Berührungspunktes des Kreises, so muß den beiden Gleichungen

$$2yy_1 = p(x + x_1) \quad \text{und} \quad yy_2 + xx_2 = r^2$$

dieselbe Gerade entsprechen. Zur Bestimmung der Koordinaten der Berührungspunkte lassen sich demnach die Gleichungen

$$2y_1x_2 + py_2 = 0, \quad x_1x_2 + r^2 = 0,$$
$$y_1^2 = px_1, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

aufstellen. Mit Hilfe derselben findet man, daß sich nur zwei gemeinschaftliche Tangenten konstruieren lassen, und zwar entsprechen diese der Gleichung

$$\pm y\sqrt{-8r^2 + 4r\sqrt{4r^2 + p^2}} + x\left(2r - \sqrt{4r^2 + p^2}\right) = rp.$$

Beispiel. $\pm y\sqrt{20\sqrt{109} - 200} + x\left(10 - \sqrt{109}\right) = 15.$

70. Zur Bestimmung der Berührungspunkte dienen folgende Gleichungen:

$$p_2y_1 = p_1y_2, \quad x_1 = x_2 - 2a,$$
$$y_1^2 = p_1x_1, \quad y_2^2 = p_2(x_2 - a).$$

Die Tangenten entsprechen der Gleichung

$$\pm 2\sqrt{\frac{a}{p_2 - p_1}}\,y = x + \frac{ap_1}{p_2 - p_1}.$$

Wann besitzen die Parabeln keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten?

Beispiele. a) $\pm 3y = x + 15\frac{3}{4}$,

b) $\pm 2i\sqrt{\frac{7}{6}}\, y = x - \frac{35}{2}$.

71. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - px_1}}{2x_1}(x - x_1).$$

Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{2y_1^2 - px_1 \pm 2y_1\sqrt{y_1^2 - px_1}}{p},$$

$$y_{\frac{2}{3}} = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - px_1}.$$

Beide Tangenten sind reell, wenn $y_1^2 > px_1$, d. h. wenn der Punkt außerhalb der Parabel liegt, sie fallen zusammen, wenn $y_1^2 = px_1$, und sind imaginär, wenn $y_1^2 < px_1$, also wenn der Punkt innerhalb der Parabelfläche liegt.

Beispiele. a) $6y - (7 \pm \sqrt{34})\, x = 21 \mp 3\sqrt{34}$,

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{83 \pm 14\sqrt{34}}{5}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 7 \pm \sqrt{34};$$

b) $10y - (3 \pm i\sqrt{46})\, x = 15 \mp 5i\sqrt{46}$,

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{-37 \pm 6i\sqrt{46}}{11}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 3 \pm i\sqrt{46}.$$

72. a) $x_2 \cdot x_3 = x_1^2$, b) $y_2 + y_3 = 2y_1$.

73. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{y_1^2 - px_1}}{x_1 + \frac{p}{4}}$.

Für $x_1 = -\frac{p}{4}$ ist $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, also $\angle\varphi = 90^0$; demnach ist $x_1 = -\frac{p}{4}$ die Gleichung des Ortes für den Durchschnittspunkt zweier Tangenten, die aufeinander lotrecht stehen.

Beispiel. $\angle\varphi = 102^0\, 20'\, 21''$.

74. Die Gleichung der Polare ist

$$2yy_1 = p(x + x_1).$$

Beispiele. a) $5y - 3x + 6 = 0$;

b) $2y + 3x + 6 = 0$, die Polare ist zugleich Tangente der Parabel;

c) $12y - 5x - 55 = 0$, die Polare hat keinen reellen Punkt mit der Parabel gemein.

75. $x = -\frac{p}{4}$. Die Polare fällt mit der Direktrix zusammen.

76. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{57 \mp 4\sqrt{14}}{11}$, $y_{\frac{1}{2}} = -1 \pm 2\sqrt{14}$.

77. Die Abscisse des Punktes, in dem die Polare geschnitten wird, ist

$$x_2 = \frac{2y_1{}^2 - px_1}{p},$$

die Abscisse des Schnittpunktes der Parabel

$$x_3 = \frac{y_1{}^2}{p},$$

demnach ist $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, d. h. die Parabel halbiert die Strecke.

78. Die Abschnitte, welche von der Polare auf den Koordinatenachsen gebildet werden, sind: $-x_1$, $\frac{px_1}{2y_1}$, deren Konstruktion sich leicht ausführen läßt.

79. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{N}{L}, \quad y_1 = -\frac{pM}{2L}.$$

Läuft demnach die Polare der Achse parallel, so liegt der Pol in der Unendlichkeit.

Beispiele. a) $x_1 = -9\frac{1}{3}$, $y_1 = 9\frac{1}{3}$;
b) $x_1 = 2$, $y_1 = \frac{7}{52}$.

80. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind: $\frac{p}{4}$, 0; d. h. der Schnittpunkt fällt mit dem Brennpunkte zusammen. Das Lot ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der Polare.

81a. Errichtet man im Brennpunkte auf der Geraden g ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix im Pole.

81b. Zieht man durch A eine Brennpunktsehne, so schneidet das im Brennpunkte auf derselben errichtete Lot die Direktrix in einem zweiten Punkte der Tangente.

82a. Die Richtungskonstanten sind: $\frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{4}}$ und $-\frac{x_1 - \frac{p}{4}}{y_1}$; die beiden Strahlen durchschneiden sich also rechtwinklig.

82b. Der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel ist ein rechter, da die Richtungskonstante der Polare $\frac{p}{2y_1}$, die der Verbindungslinie $-\frac{2y_1}{p}$ ist.

83. Die beiden Abschnitte sind gleich.

84. Die Verbindungslinie der Pole ist die Polare des Schnittpunktes der beiden gegebenen Geraden und entspricht der Gleichung $13y - 7x = 10\frac{1}{2}$. Der Inhalt des Dreiecks ist

$$4\tfrac{1257}{3712}\square.$$

85. Die Polaren entsprechen der Gleichung $2yy_1 - 2k^2 = p(x + x_1)$, d. h. sie bilden ein Büschel, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Geraden $yy_1 - k^2 = 0$ und $x + x_1 = 0$ ist.

86. Dividiert man die Gleichung der Polare

$$2yy_1 = p(x + x_1)$$

durch $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, so erhält man:

$$\frac{2yy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{px}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{px_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 0,$$

oder

$$2y \sin\varphi - \frac{px}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - p\cos\varphi = 0,$$

wo φ der Winkel ist, den die Verbindungslinie zwischen dem Koordinatenanfangspunkte und dem Punkte P mit der X-Achse einschließt. Rückt der Punkt P in die Unendlichkeit, so geht die Gleichung über in

$$2y \sin\varphi - p\cos\varphi = 0.$$

Die Polare eines unendlich fernen Punktes läuft demnach der Achse der Parabel parallel; sie wird ein Durchmesser derselben genannt.

87. Es sei $y = x \operatorname{tg}\varphi + n$ eine nach dem unendlich fernen Punkte gerichtete Gerade. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Punkte, in welchen dieselbe von der Parabel, dagegen (x_3, y_3) der Punkt, in welchem sie von dem Durchmesser geschnitten wird, so ist:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Jeder Durchmesser halbiert sonach die Schar paralleler Sehnen, welche sich in dem zugehörigen unendlich fernen Pole durchschneiden.

88. $y = \frac{p}{2M}$.

Beispiel. $y = 3\frac{1}{8}$.

89. $y = \frac{p}{2k}x + n$, worin n jeden beliebigen reellen Wert besitzen kann.

Beispiel. $22y + 13x - 22n = 0$.

90. $y - x + 1 = 0$.

91. $2qy - px = 0$. Die Sehne ist der Tangente parallel, welche im Endpunkte des Durchmessers die Parabel berührt.

Beispiel. $9y + 8x = 0$.

92. Die Polaren entsprechen der Gleichung

$$14y + 9x + 9x_1 = 0,$$

worin x_1 jeden beliebigen reellen Wert haben kann; sie sind demnach identisch mit den Sehnen, welche von dem gegebenen Durchmesser halbiert werden.

93. $y = \frac{p}{2M}$, d. h. der geometrische Ort der Pole ist der den Sehnen konjugierte Durchmesser.

94. Die Richtungskonstante der Tangente ebenso wie die der Polare ist gleich $\frac{p}{2y_1}$. Die beiden geraden Linien sind demnach parallel.

95. Der Durchmesser halbiert die Polare, folglich auch die ihr parallele Tangente. Da die Strecke des Durchmessers zwischen P und der Polare durch die Parabel halbiert wird (vergl. Lösung 77), so folgt, daß auch jede der beiden ersten Tangenten durch die dritte in zwei gleiche Teile zerlegt wird.

96. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die Berührungspunkte der Tangenten, so ist der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks

$$J' = \frac{1}{2p}\{y_1(y_2^2 - y_3^2) + y_2(y_3^2 - y_1^2) + y_3(y_1^2 - y_2^2)\},$$

dagegen der des umschriebenen Dreiecks (vergl. Lösung 59)

$$J'' = \frac{1}{4p}\{y_1(y_2^2 - y_3^2) + y_2(y_3^2 - y_1^2) + y_3(y_1^2 - y_2^2)\}.$$

Daraus folgt: $J' = 2J''$.

97. Durch Anwendung der Transformationsformeln

$$x = x_1 + \xi + \eta \cos\varphi,$$
$$y = y_1 + \eta \sin\varphi$$

erhält man

$$\eta^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}\,\xi.$$

98. Nach der vorhergehenden Lösung ist der Parameter $p_1 = \frac{p}{\sin^2\varphi}$, oder da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2y_1}$ ist, $p_1 = p + 4x_1$, d. h. der Parameter eines Durchmessers ist gleich der vierfachen Entfernung des Endpunktes des letzteren vom Brennpunkte der Parabel.

99. Wählt man den konjugierten Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben zu Koordinatenachsen, so erhält man

$$(2\eta_1)^2 : (2\eta_2)^2 = \xi_1 : \xi_2,$$

d. h. die Quadrate paralleler Sehnen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Halbierungspunkte vom Endpunkte des konjugierten Durchmessers.

100. $x_1 = -a, \quad y_1 = -\frac{ap}{2b\sin^2\varphi}.$

101. Wählt man den der Sehne konjugierten Durchmesser zur Abscissenachse, so findet man leicht, daß die beiden äußeren Abschnitte der Sehne einander gleich sind.

102. Die Gleichung des Ortes ist

$$y^2 = \frac{p}{4}x,$$

d. h. die Halbierungspunkte liegen auf einer Parabel, deren Parameter gleich dem vierten Teile des Parameters der Fundamentalparabel ist.

103. Die Gleichungen der Örter sind in Polarkoordinaten:

$$\text{a)}\ \varrho = \frac{\frac{p}{4}}{1-\cos\varphi}, \quad \text{b)}\ \varrho = \frac{p}{1-\cos\varphi},$$

oder in Parallelkoordinaten bezogen auf das ursprüngliche Achsensystem:

$$\text{a)}\ y^2 = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{16}, \quad \text{b)}\ y^2 = 2px + \frac{p^2}{2}.$$

104. Ist $y = \operatorname{tg}\alpha\left(x + \frac{p}{4}\right)$ die Gleichung einer Sekante, so sind die Koordinaten des Halbierungspunktes der Sehne

$$\xi = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}^2\alpha} - \frac{p}{4}, \quad \eta = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Daraus erhält man durch Elimination von $\mathrm{tg}\,\alpha$ die Gleichung des Ortes

$$\eta^2 = \frac{p}{2}\xi + \frac{p^2}{8}.$$

105. $y^2 = px$.

106. Eliminiert man x_1 aus den Relationen

$$y - \sqrt{p x_1} = -2\sqrt{\frac{x_1}{p}}(x - x_1),$$

$$2y\sqrt{p x_1} = p\left(x - \frac{p}{4}\right),$$

so findet man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\left(y^2 - \frac{p}{4}x + \frac{p^2}{16}\right)\left\{y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2\right\} = 0.$$

Der Gleichung $y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 = 0$ entspricht der Brennpunkt der gegebenen Parabel. Die Fußpunkte der Lote liegen demnach auf der Parabel

$$y^2 - \frac{p}{4}x + \frac{p^2}{16} = 0.$$

107. $\{y^2 - 4p(x - \frac{3}{4}p)\}(x - \frac{3}{4}p) = 0$.

Der geometrische Ort wird von einer Parabel und deren Scheiteltangente gebildet.

108. $y^2 = px + \frac{p^2 d^2}{16}$.

109. Die Gerade g sei die Y-Achse, das von P darauf gefällte Lot die X-Achse. Ist k der Abstand des Punktes P von g, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$y^2 = 2k\left(x - \frac{k}{2}\right).$$

Die Gerade g ist die Direktrix, der Punkt P der Brennpunkt der Parabel.

110. Ist g die Y-Achse, das von P darauf gefällte Lot die X-Achse, so erhält man:

$$y^2 = 4kx.$$

Die Gerade g ist die Scheiteltangente, der Punkt P der Brennpunkt.

111. $y^2 = 2k\left(x - \frac{k}{2}\right)$.

112. Die Grundlinie a möge mit der X-Achse, der links liegende Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 = 2ax - a^2,$$

oder

$$y^2 = -2ax + a^2.$$

113. Es möge die Gerade g Y-Achse sein, das von der festen Spitze auf diese gefällte Lot die X-Achse und die Abscisse der festen Spitze r, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 = 2rx - r^2 + \frac{c^2}{4}.$$

114. Durch Elimination von A, B, C aus den Relationen

$$x = \frac{c \cdot \cos A \cdot \sin B}{\sin C}, \quad y = \frac{c \cdot \cos A \cdot \cos B}{\sin C},$$

$$J = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}$$

erhält man

$$cx(c - x) = 2Jy.$$

Die Scheiteltangente läuft der X-Achse parallel, die Koordinaten des Scheitels sind $x_1 = \frac{c}{2}$, $y_1 = \frac{c^3}{8J}$.

115. Der Schwerpunkt beschreibt die Parabel

$$y^2 = \frac{p}{3}x - \frac{pc}{9}.$$

Der Parameter ist gleich $\frac{p}{3}$, der Scheitel liegt um $\frac{c}{3}$ vom Scheitel der Fundamentalparabel entfernt.

116. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$3y - m(3x - c) + n(3x - c)^2 = 0.$$

Die Kurve ist eine Parabel. Welches sind die Koordinaten des Scheitels? Welches ist die Gleichung der Direktrix?

117. Ist g die X-Achse, das von P auf g gefällte Lot die Y-Achse, so besitzt die Gleichung des geometrischen Ortes die Gestalt

$$x^2 = 2ry - (r^2 - d^2),$$

wenn r der Abstand des Punktes P von der Geraden g ist. Die Achse der Parabel fällt mit der Y-Achse zusammen.

118. Die Gleichung ist

$$y^2 = 2rx - r^2.$$

Die Parabel hat die Y-Achse zur Direktrix, den Kreismittelpunkt zum Brennpunkte und den vertikalen Durchmesser zum Parameter.

119. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, da die zu konstruierenden Kreise den gegebenen Kreis ausschließend oder einschließend berühren können. Im ersten Falle ist die Gleichung des Ortes

$$y^2 = 2(a + r)x + r^2 - a^2,$$

im zweiten Falle

$$y^2 = 2(a - r)x + r^2 - a^2.$$

Die Koordinaten der Scheitel sind: $\frac{a-r}{2}$, 0 und $\frac{a+r}{2}$, 0.

120. $y^2 = 2ax + r^2 - a^2$. Die Koordinaten des Scheitels sind $\frac{a^2 - r^2}{2a}$, 0; die Gleichung der Direktrix $x + \frac{r^2}{2a} = 0$.

121. Fällt $BC = q$ mit der X-Achse, $AB = p$ mit der Y-Achse zusammen (s. Fig. 2), so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$qy^2 + p^2x - pqy = 0.$$

Die Achse läuft der X-Achse parallel, der Parameter ist gleich $\frac{p^2}{q}$, die Koordinaten des Scheitels sind $\frac{q}{4}$, $\frac{p}{2}$.

Fig. 2.

122. $y^2 = 8r(2r - x)$.

123. $y^2 = -\frac{4r^2}{p}x$, $x = 0$.

Der geometrische Ort besteht aus einer Parabel und der Scheiteltangente derselben. Die Parabel breitet sich symmetrisch zum negativen Teile der X-Achse aus.

124a. Determination. Man erhält zwei Lösungen, da sich zwei Direktrixen konstruieren lassen.

124b. Determination. Die Tangente darf der Achse nicht parallel laufen. Es ergiebt sich nur eine Parabel.

125. Determination. F muß außerhalb t liegen. Es läßt sich stets nur eine Direktrix konstruieren.

126. Determination. t_1 und t_2 müssen konvergent sein. Es ergiebt sich bei der Konstruktion nur eine Parabel.

127. Man bestimmt zunächst nach der vorhergehenden Lösung Scheiteltangente, Direktrix und Achse. Da die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ist, so lassen sich die Berührungspunkte von t_1 und t_2, sowie die zugehörigen Brennstrahlen leicht finden. Beschreibt man um den Brennpunkt mit der halben Summe dieser Brennstrahlen einen Kreis, so schneidet dieser eine Parallele zur Direktrix, deren Abstand gleich dem Radius ist, in zwei Punkten, welche beide der Anforderung genügen.

128. Man bestimmt zunächst die Koordinaten des Poles der durch P gehenden Geraden und konstruiert mit Hilfe von Auflösung 52 die beiden gesuchten Tangenten.

129a. Beschreibt man um jeden der Punkte P_1 und P_2 mit seinem Abstande von F als Radius einen Kreis, so kann jede der beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise als Direktrix dienen.

129b. Man findet leicht einen Punkt der Direktrix, deren Richtung mit einer der Tangenten zusammenfällt, die sich von diesem Punkte an den um P mit PF als Radius beschriebenen Kreis ziehen lassen. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen. Wann ergiebt sich nur eine, wann gar keine Lösung der Aufgabe?

130. Ein geometrischer Ort eines zweiten Punktes der Direktrix läßt sich leicht finden: Wie groß ist die Zahl der Lösungen?

131. Der Kreis, welchen man um jeden der gegebenen Punkte mit dem Abstande desselben von der Direktrix beschreibt, ist ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Man erhält im allgemeinen zwei Parabeln. Wann ist die Konstruktion der Parabel unmöglich?

132. Determination. Man erhält zwei Parabeln, wenn der um P mit dem Abstande dieses Punktes von d als Radius beschriebene Kreis die Achse a in zwei reellen Punkten schneidet, eine Parabel, wenn der Kreis von a berührt wird, keine Parabel, wenn der Kreis und a keinen reellen Punkt gemein haben.

133. Determination. Die Konstruktion liefert nur einen Brennpunkt, also läßt sich auch nur eine Parabel zeichnen. d und t dürfen nicht rechtwinklig zu einander stehen.

134. Trägt man den Winkel, welchen die Tangente mit der Direktrix einschließt, auf der andern Seite der Tangente an, so

erhält man einen geometrischen Ort für den Brennpunkt. Man findet im allgemeinen zwei Punkte, welche der Anforderung der Aufgabe genügen.

135. Die Konstruktion liefert nur einen Punkt. Unlösbar ist die Aufgabe, wenn die Tangente t auf der Direktrix lotrecht steht, unbestimmt, wenn t und s zusammenfallen.

136. Determination. Man erhält nur eine Lösung.

137. Konstruiert man mit Hilfe der Subtangente die Tangente der Parabel im Punkte P, so findet man mit Leichtigkeit einen geometrischen Ort des Brennpunktes.

138. Man findet leicht die Scheiteltangente und mit Hilfe derselben Brennpunkt und Direktrix.

Determination. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren. Unlösbar ist die Aufgabe, wenn a und t parallel sind.

139. Determination. a und t müssen konvergieren. Man erhält nur eine Lösung.

140. Determination. t_1 und t_2 dürfen weder parallel sein noch sich lotrecht durchschneiden. Wie viele Lösungen ergeben sich?

141. Die Verbindungslinie zwischen dem Schnittpunkte der Tangenten und dem Halbierungspunkte der Berührungssehne läuft der Achse der Parabel parallel. Zieht man durch die Berührungspunkte zu dieser Geraden Parallelen, so schließen diese mit den Tangenten Winkel ein, mit deren Hilfe man zwei geometrische Örter für den Brennpunkt finden kann.

Determination. Die Tangenten dürfen nicht parallel sein. Man erhält nur einen Brennpunkt und eine Direktrix.

142. Determination. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren. Welche gegenseitige Lage dürfen t_1, t_2, t_3 nicht besitzen?

143. Der dem Tangentendreieck umschriebene Kreis ist ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Vergl. Aufgabe 63.

Determination. Man findet im allgemeinen zwei Parabeln.

144. Der Höhenpunkt des Tangentendreiecks liegt auf der Direktrix.

145. Für den Brennpunkt ergeben sich zwei geometrische Örter. Wie viele Lösungen findet man?

146. Die Ordinaten der Punkte P_1 und P_2, nämlich y_1, y_2, sind bekannt. Bezeichnet man den Abstand dieser Linien mit d, so lassen sich die beiden Relationen

$$x_1 = \frac{d}{y_2 + y_1} \cdot \left(\frac{y_1^2}{y_2 - y_1}\right), \quad x_2 = \frac{d}{y_2 + y_1} \left(\frac{y_2^2}{y_2 - y_1}\right)$$

zur Konstruktion der zugehörigen Abscissen verwerten.

Determination. Man findet nur eine Parabel. Die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 darf der Achse a weder parallel laufen noch dieselbe rechtwinklig durchschneiden.

147. Legt man um die vier Dreiecke, von denen jedes von drei Tangenten begrenzt wird, die umschriebenen Kreise, so schneiden sich dieselben im Brennpunkte der Parabel.

Determination. Von den vier Tangenten darf keine der anderen parallel sein, außerdem dürfen nicht mehr als zwei durch einen Punkt gehen. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren.

148. Man nimmt an, daß in P_1 zwei Tangenten zusammenstoßen. Vergl. Lösung 147.

149. Der Scheitel der Parabel liegt im Halbierungspunkte der Höhe. Mit Hilfe der Scheiteltangente findet man Brennpunkt und Direktrix.

150. Lösung 95 liefert das Mittel, die Berührungspunkte auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten zu finden. Diese lassen sich zur Konstruktion geometrischer Örter des Brennpunktes verwenden.

151. Durch Konstruktion paralleler Sehnenscharen kann man leicht Tangenten finden und mit Hilfe dieser geometrische Örter für den Brennpunkt.

152. S. die vorhergehende Lösung.

153. Man konstruiert zunächst Normale und Tangente in dem gegebenen Punkte P.

Determination. Es lassen sich zwei Parabeln zeichnen.

154. Ist M der Schnittpunkt der Direktrix und der Polare, so ist der Kreis über PM als Durchmesser ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Einen zweiten geometrischen Ort findet man mit Hilfe von Lösung 82b.

155. Die Lösungen 82a und b liefern das Mittel, die Lage von zwei Punkten der Direktrix zu finden.

156. Zieht man durch P eine Parallele zur Achse bis zum Durchschnitt mit p, so findet man leicht einen Punkt der Parabel sowie die Richtung der Tangente in demselben. Die Konstruktion läßt sich demnach auf Lösung 138 zurückführen.

157. Man findet durch eine einfache Konstruktion einen Punkt der Kurve, die Tangente in demselben und den Brennpunkt.

158. $J = \frac{2}{3}\sqrt{p}\left(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}\right)$.

Beispiel. $J = 42\frac{8}{9}\,\square$.

159. $\text{Segm.} = \frac{p^2}{6}$.

Beispiel. Segm. $= 13{,}5\,\square$.

160. Der Parameter der Parabel ist gleich $\frac{4}{3}a$.

161. $\text{Segm.} = \frac{1}{6}\sqrt{p}\left(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{p x_1 x_2}\left(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right)$,

$$= \frac{1}{6}\sqrt{p}\left(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right)^3.$$

Beispiel. Segm. $= 2\frac{2}{3}\,\square$.

162. $\text{Segm.} = \frac{1}{6}\cdot\frac{p^2}{\operatorname{tg}^3\alpha}$.

Beispiel. Segm. $= 9{,}846667\ldots\,\square$.

163. $J = \frac{s^2\sqrt{3}}{12}\cdot\square$.

164. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Schnittpunkte der Sehne und der Parabel, so ist der Inhalt des Segmentes

$$J = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{6} + \frac{p}{8}(y_1 - y_2),$$

oder

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{(y_1 - y_2)\left(x_1 + x_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}\right\},$$

d. h. der Inhalt des Segmentes ist gleich dem dritten Teile des Trapezes, welches von der Direktrix, der Parabelsehne und den Loten, welche von den Endpunkten der letzteren auf die erstere sich fällen lassen, begrenzt ist.

Beispiel. $J = \frac{49\sqrt{2}}{3} = 23{,}0988\ldots\,\square$.

165. Es ist $F_1 = \frac{p^2}{12}$, $F_2 = \frac{5}{6}p^2$, also

$$F_1 : F_2 = 1 : 10.$$

166. Man findet: Segm. $= \frac{1}{6} \sqrt{p} \left(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right)^3$,

Parallelogr. $= \frac{1}{4} \sqrt{p} \left(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right)^3$.

Demnach ergiebt sich

Parallelogr. : Segm. = 3 : 2.

167. Eine einfache geometrische Betrachtung führt zu dem Resultate: Das von den Tangenten und dem Parabelbogen eingeschlossene Flächenstück ist halb so groß als das zugehörige Segment der Parabel.

168. Segm. = 24,97408 ... □.

169. $J = 193$ □.

170. Man erhält

$$F_1 = F_2 = \frac{p^2 (8\pi - 9\sqrt{3})}{6} = 1{,}590723\, p^2,$$

$$F_3 = \frac{p^2 (4\pi + 9\sqrt{3})}{3} = 9{,}3849234\, p^2.$$

171. Es ist

$$F_1 = p^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\right), \qquad F_2 = p^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right),$$

also $F_1 : F_2 = 3\pi + 2 : 3\pi - 2$.

172. $J = \frac{1}{3} p^2$.

173. $J = \dfrac{p^2 \sqrt{2}}{6}$.

174. Sind die Gleichungen der beiden Parabeln

$$y^2 = p_1 \left(x + \frac{p_1}{4}\right) \quad \text{und} \quad y^2 = -p_2 \left(x - \frac{p_2}{4}\right),$$

so ist der Inhalt des Flächenstückes

$$J = \frac{1}{6} (p_1 + p_2) \sqrt{p_1 p_2}.$$

175. Sect. $= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\frac{1}{2}p + r_2}{2}\, r_2 \sin \varphi_2 - \frac{\frac{1}{2}p + r_1}{2}\, r_1 \sin \varphi_1 \right\}$.

Beispiel. Sect. = 124,401 ... □.

176. Die gesuchte Winkelentfernung des Kometen vom Perihel beträgt

$$90^0\ 11'\ 3'';$$

er erreicht dieselbe nach Verlauf von

677,053 Tagen.

Man benutzt den Satz: Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Die Ellipse.

177. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - e^2),$$

oder wenn $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt wird,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

178. $25y^2 + 9x^2 = 225.$

179. $169y^2 + 25x^2 = 4225.$

180. $225y^2 + 144x^2 = 32400.$

181. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{y_1{}^2x_2{}^2 - y_2{}^2x_1{}^2}{y_1{}^2 - y_2{}^2}\,y^2 + \frac{x_1{}^2y_2{}^2 - x_2{}^2y_1{}^2}{x_1{}^2 - x_2{}^2}\,x^2 = \left\{\frac{y_1{}^2x_2{}^2 - y_2{}^2x_1{}^2}{y_1{}^2 - y_2{}^2}\cdot\frac{x_1{}^2y_2{}^2 - x_2{}^2y_1{}^2}{x_1{}^2 - x_2{}^2}\right\}.$$

Beispiel. $7y^2 + 3x^2 = 115.$

182. $49y^2 - 686y + 16x^2 - 128x + 1873 = 0.$

183. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 1;$$

die Achsen: $2a = 8, \quad 2b = 6;$

die Koordinaten der Brennpunkte:

$$x_{\frac{2}{3}} = -2 \pm \sqrt{7}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 1.$$

184. Es ist $y_1{}^2 : y_2{}^2 = (a + x_1)\,(a - x_1) : (a + x_2)\,(a - x_2)$, d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rechtecke aus den Abschnitten, welche dieselben auf der Hauptachse bilden.

185. Der Parameter ist $p = \frac{6}{7}\sqrt{6}$, die numerische Excentricität

$$\varepsilon = \tfrac{2}{7}\sqrt{7}.$$

186. Das Verhältnis der Achsen hat in beiden Ellipsen denselben Wert.

187. Die beiden Ellipsen sind kongruent.

188. $x = y = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Ist s die Sehne, welche zwei Endpunkte der Achsen verbindet, so läßt sich die Proportion $s : a = b : x$ zur Konstruktion verwenden.

189. Die Gleichungen der Brennstrahlen sind:

$$y(x_1 - e) = y_1(x - e), \quad y(x_1 + e) = y_1(x + e);$$

die Längen derselben:

$$r_1 = a - \frac{e}{a} x_1, \quad r_2 = a + \frac{e}{a} x_1.$$

Beispiel. $x = 8$; $4y = 0{,}9(x + 8)$,

$r_1 = 3{,}6$, $r_2 = 16{,}4$.

190. $\angle \varphi = 83^0 6' 28{,}4''$.

191. Man erhält vier Punkte der Ellipse, deren Koordinaten sind:

$$x = \pm \frac{a}{e}\sqrt{a^2 - \tfrac{9}{4}b^2}, \quad y = \pm \frac{b^2}{2e}\sqrt{5}.$$

Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn $a \geqq \frac{3}{2} b$ ist.

192. $9y^2 + 8x^2 = 8a^2$.

193. $y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$ oder $y^2 = px - qx^2$.

194. Es existieren zwei Punkte, deren Abscissen sind:

$$x_1 = 1\tfrac{1}{5}, \quad x_2 = 10\tfrac{4}{5}.$$

195. $2a = 18$, $2b = 10$.

196. $y^2 = 5x - \frac{25}{144} x^2$.

197. $2a = \frac{{y_1}^2 {x_2}^2 - {y_2}^2 {x_1}^2}{{y_1}^2 x_2 - {y_2}^2 x_1}$, $2b = \frac{{y_1}^2 {x_2}^2 - {y_2}^2 {x_1}^2}{\sqrt{x_1 x_2 (x_2 - x_1)({y_1}^2 x_2 - {y_2}^2 x_1)}}$.

Beispiel. $2a = 8$, $2b = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

198. $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$ oder $r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + e^2 \sin^2 \varphi}}$;

$$\frac{1}{{r_1}^2} + \frac{1}{{r_2}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

199. Wählt man den links liegenden Brennpunkt zum Pol, so erhält man

$$\varrho = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \varepsilon \cos \varphi};$$

nimmt man dagegen den rechts liegenden Brennpunkt als Pol an, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

200. Die Differenz der Anomalien ist gleich 180^0; man erhält demnach

$$\varrho_1 = \frac{\frac{1}{2}p}{1-\varepsilon\cos\varphi_1},\quad \varrho_2 = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\varepsilon\cos\varphi_1},$$

daher ist

$$\varrho_1\cdot\varrho_2 = \frac{p^2}{4\,(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi_1)},$$

und

$$\varrho_1+\varrho_2 = \frac{p}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi_1},$$

also

$$\varrho_1\cdot\varrho_2 = \frac{p}{4}\cdot(\varrho_1+\varrho_2),$$

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne ist gleich dem aus der ganzen Sehne und dem vierten Teile des Parameters.

201. Nach der vorhergehenden Lösung findet man leicht

$$\varrho_1\cdot\varrho_2 : \varrho_1{}^1\cdot\varrho_2{}^1 = \varrho_1+\varrho_2 : \varrho_1{}^1+\varrho_2{}^1.$$

202. Man findet leicht

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{4}{p}.$$

203. $\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2a}.$

204. Ist $\varrho = \dfrac{\frac{1}{2}p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ die Gleichung der Ellipse, so ist

$$\cos\varphi = \tfrac{5}{6},\quad \text{also}\quad \angle\varphi = 33^0\,33'\,26{,}4''.$$

205. 52150 Meilen.

206. $\varepsilon = 0{,}0168.$

207. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mna^2 \pm ab\sqrt{a^2M^2+b^2-n^2}}{a^2M^2+b^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{nb^2 \pm Mab\sqrt{a^2M^2+b^2-n^2}}{a^2M^2+b^2}.$$

Beispiele.

a) $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{-875 \pm 20\sqrt{145}}{629},\qquad y_{\frac{1}{2}} = \dfrac{28 \pm 100\sqrt{145}}{629}.$

b) $x_{\frac{1}{2}} = 4\tfrac{4}{5},\qquad y_{\frac{1}{2}} = -3.$

c) $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{-198 \pm 2i\sqrt{1895}}{43},\qquad y_{\frac{1}{2}} = \dfrac{77 \pm 4i\sqrt{1895}}{43}.$

208. Setzt man $M = \operatorname{tg}\varphi$, so läßt sich die Relation auf die Form bringen

$$a^2 \gtreqless e^2\cos^2\varphi + n^2\cos^2\varphi,$$

d. h. die Gerade schneidet die Ellipse in zwei reellen Punkten, wenn der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes in der Fläche des Hauptkreises, in zwei imaginären Punkten, wenn der Fußpunkt des Lotes außerhalb der Kreisfläche liegt. Die Gerade wird dagegen Tangente der Ellipse, wenn der Fußpunkt des Lotes in die Peripherie des Hauptkreises fällt.

209. $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0.$

210. Die Achsenabschnitte, welche von den Loten, die auf einer Sehne stehen, gebildet werden, sind:

$$-\frac{1}{u} = \pm\sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - e^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$-\frac{1}{v} = \pm\frac{\sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - e^2\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Daraus erhält man durch Elimination von $\operatorname{tg}\varphi$

$$a^2u^2 + (a^2 - e^2)v^2 - 1 = 0.$$

Die Enveloppe ist eine Ellipse.

211. $r^2u^2 + (r^2 - e^2)v^2 - 1 = 0.$

212. Eliminiert man aus den Relationen

$$-\frac{1}{u} = \sqrt{r^2 + (r^2 - e^2)\operatorname{tg}^2\varphi}, \qquad -\frac{1}{v} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{r^2 + (r^2 - e^2)\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$\operatorname{tg}\varphi$, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Kurve

$$r^2u^2 + (r^2 - e^2)v^2 - 1 = 0.$$

213. Mit Hilfe von $-\frac{1}{u} = k$ und $-\frac{1}{v} = \frac{ak}{\sqrt{f^2 + k^2 - a^2}}$ findet man durch Elimination von k

$$a^2v^2 + u^2(a^2 - f^2) - 1 = 0.$$

Für $a = f$ erhält man $a^2v^2 - 1 = 0$. Welche Bedeutung hat diese Gleichung?

214. Als Gleichung der Enveloppe findet man

$$r^2u^2 + 4r^2v^2 - 1 = 0.$$

Dieselbe ist demnach eine Ellipse.

215. Die X-Achse wird in den Punkten $x_1 = 4$ und $x_2 = -10$, die Y-Achse in den Punkten $y_{\frac{1}{2}} = 2 \pm \frac{\sqrt{1196}}{7}$ geschnitten.

216. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{68 \pm 12\sqrt{21}}{25}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{9 \pm 6\sqrt{21}}{25}.$$

217. Man erhält

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{2028 \pm 325\sqrt{2}}{194}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-300 \pm 325\sqrt{2}}{194};$$

oder

$$x_{\frac{3}{4}} = \frac{-2028 \pm 325\sqrt{2}}{194}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \frac{300 \mp 325\sqrt{2}}{194}.$$

218. Man erhält zwei Sehnen, welche der Gleichung

$$\pm 2\sqrt{10}\,y = 3x + 3\sqrt{91}$$

entsprechen.

219. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{31}}{6}\,x.$$

220. Die Gleichung der Verbindungslinie ist:

$$\frac{y}{5} + \frac{x}{7} = \sqrt{5} - 2,$$

die Koordinaten der Teilpunkte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \tfrac{7}{2}\left\{\sqrt{5} - 2 \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 7}\right\}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \tfrac{5}{2}\left\{\sqrt{5} - 2 \mp \sqrt{4\sqrt{5} - 7}\right\}.$$

221. Die Gleichungen der Seiten sind:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

der Inhalt ist $= \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

222. a) $x_{\frac{1}{2}} = \frac{a(3b^2 - a^2)}{3b^2 + a^2}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{2\sqrt{3}\,ab^2}{3b^2 + a^2};$

b) $x_{\frac{3}{4}} = \frac{a(ae - 2b^2\sqrt{3})}{3b^2 + a^2}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm \frac{b^2(2a\sqrt{3} + 3e)}{\sqrt{3}(3b^2 + a^2)}.$

223. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{43}}{26}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{51}{26};$

$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{15\sqrt{43}}{26}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm \frac{51}{26}.$

224. Die Koordinaten der Ecken sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b}{2}\sqrt{2};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

225. Die Gleichungen der Seiten sind:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

226. $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$.

Beispiele. a) $4y + x = 10$;

b) $\pm 3\sqrt{3}y - 2x = 12$.

227. $5(10 - 3\sqrt{3})y + (15 + 32\sqrt{3})x = 730$.

228. Die Gleichung der Normale ist:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

die Abschnitte auf den Achsen:

$$\frac{e^2 x_1}{a^2}, \quad -\frac{e^2 y_1}{b^2}.$$

Beispiel. $2\sqrt{5}y + 5x - 7 = 0$; $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{2\sqrt{5}}$.

229. $$\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{b x_1}\sqrt{a^4 - e^2 x_1^{\,2}} = \frac{a y_1}{b x_1}\sqrt{r_1 r_2};$$

$$\mathrm{N} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x_1^{\,2}} = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2};$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{a^2 y_1^{\,2}}{b^2 x_1}; \qquad \mathrm{Sbn} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Beispiel. Tg = 2,55, N = 1,36, Sbtg = 2,25, Sbn = 0,64.

230. $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

231. $$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

232. Man findet als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\{y^2 + (x - e)^2\}\{y^2 + x^2 - a^2\} = 0,$$

oder

$$y^2 + (x - e)^2 = 0, \quad y^2 + x^2 - a^2 = 0.$$

Der ersten Gleichung entspricht der Brennpunkt $(e, 0)$, der zweiten der Hauptkreis der gegebenen Ellipse.

233. $y^2 + (x + e)^2 = (2a)^2$.

Der geometrische Ort ist demnach die Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt in $(-e, 0)$ liegt, und dessen Radius gleich der Hauptachse der Ellipse ist.

234. $x^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)(y^2 + x^2 - a^2) = 0$.

Der geometrische Ort ist der Hauptkreis. Setzt man die ersten Faktoren gleich Null, so entspricht den Gleichungen die Y-Achse und der Koordinatenanfangspunkt.

235. Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dfrac{2a^2b^2y_1(a^2 - ex_1)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2} \\ -e & x_1 & \dfrac{2a^2b^4x_1 + a^4ey_1^2 - b^4ex_1^2}{a^4y_1^2 + b_4x_1^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

236. Die Winkel sind einander gleich. Die Richtigkeit folgt aus der Lösung 235.

237. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$y^2 + (x + e)^2 = 4a^2,$$

d. h. die Gegenpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises, der den andern Brennpunkt zum Mittelpunkte und die Hauptachse der Ellipse zum Radius hat. Vergl. Aufg. 233.

238. α) Die Subtangenten sind gleich.

β) $\mathrm{Sbn}_k : \mathrm{Sbn}_e = a^2 : b^2$.

239. Man verlängert die Ordinate des Berührungspunktes bis zum Schnitt mit dem Hauptkreise und legt in diesem Punkte an den Hauptkreis eine Tangente. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der X-Achse ist ein zweiter Punkt der Tangente, welche an die Ellipse zu legen ist.

240. Beschreibt man über dem Abstande des gegebenen Punktes P von einem Brennpunkte als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser den Hauptkreis der Ellipse in einem zweiten Punkte der Tangente.

Determination. Man erhält im allgemeinen zwei Tangenten. Wann ergiebt sich nur eine Tangente? Weshalb ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, wenn der Punkt P in der Fläche der Ellipse liegt?

241. Man erhält zwei Tangenten, welche der Gleichung

$$3y - 4x = \pm\sqrt{107}$$

entsprechen.

242. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind bestimmt durch die Gleichungen

$$36y_1^2 + 25x_1^2 = 900, \quad 36y_1 + 25\sqrt{3}x_1 = 0,$$

also

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{37}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \mp\frac{25}{\sqrt{37}}.$$

243. Es giebt vier Tangenten, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen. Dieselben entsprechen den Gleichungen:

$$\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{-13+3\sqrt{41}}{2}}\,y + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{21-3\sqrt{41}}{2}}\,x = 3,$$

$$\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{-13+3\sqrt{41}}{2}}\,y - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{21-3\sqrt{41}}{2}}\,x = 3.$$

244. $\angle\varphi = 127^0\ 59'\ 53{,}4''$.

245. Man findet vier Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = +\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

246. Das Rechteck ist gleich dem Quadrate über der kleineren Halbachse.

247. Das Rechteck aus beiden Loten ist gleich dem Quadrate über der kleineren Halbachse.

248. Das Resultat ergiebt sich mit Hilfe von Lösung 236.

249. Die Abschnitte verhalten sich wie e^2 zu b^2.

250. Es ist $N_{(x)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x_1^2}$, $N_{(y)} = \frac{1}{b}\sqrt{a^4 - e^2x_1^2}$, also

$$N_{(x)} : N_{(y)} = b^2 : a^2.$$

251. Man erhält

$$\alpha)\ \frac{a^2b^2}{x_1y_1}, \quad \beta)\ \frac{e^4x_1y_1}{a^2b^2}.$$

252. Die Gleichung des Kreises ist

$$x^2 + \left(y - \frac{b^2}{y_1}\right)^2 = \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{a^2y_1^2};$$

die X-Achse wird von demselben in den Brennpunkten der Ellipse geschnitten.

253. Der Kreis schneidet die Hauptachse in den beiden Brennpunkten; die Gleichung desselben ist

$$x^2 + \left(y - \frac{b^4 - e^2 y_1{}^2}{2 b^2 y_1}\right)^2 = \left(\frac{b^4 + e^2 y_1{}^2}{2 b^2 y_1}\right)^2.$$

254. Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch die Relation

$$\cos\vartheta = \frac{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}\,\sqrt{a^4 y_2{}^2 + b^4 x_2{}^2}},$$

die Verbindungslinie entspricht der Gleichung

$$a^2 (y_1 - y_2) y + b^2 (x_1 - x_2) x = 0.$$

Beispiel. $\angle\vartheta = 135^0\, 55'\, 49''$;

$$3\left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) y - 4x = 0.$$

255. Die beiden Winkel sind gleich.

256. Die Winkel haben einen konstanten Wert.

257. Nach der Lösung 254 findet man

$$y_1 y_2 : x_1 x_2 = b^4 : -a^4.$$

258. Mit Hilfe der Gleichungen

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2, \qquad a^2 y_2{}^2 + b^2 x_2{}^2 = a^2 b^2,$$
$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \quad a^2 y_2 y + b^2 x_2 x = a^2 b^2,$$
$$a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2 = 0$$

erhält man durch Elimination von x_1, y_1, x_2, y_2 die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2.$$

259. Die Umfänge sämtlicher Rhomben sind gleich.

260α. Wird der Kreis im Punkte (x_1, y_1), die Ellipse im Punkte (x_2, y_2) berührt, so müssen die Koordinaten der Berührungspunkte den Relationen

$$b^2 x_2 y_1 = a^2 x_1 y_2, \quad b y_1 = a y_2$$

genügen. Daraus findet man die Gleichungen

$$\pm a \sqrt{\frac{b}{a+b}}\, y + b \sqrt{\frac{a}{a+b}}\, x = ab,$$

$$\mp a \sqrt{\frac{b}{a+b}}\, y - b \sqrt{\frac{a}{a+b}}\, x = ab.$$

Der Kreis und die Ellipse haben demnach vier gemeinschaftliche Tangenten.

260β. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a - b}{\sqrt{ab}}$.

261. Die Schnittpunkte des gegebenen Kreises und des Hauptkreises der Ellipse sind Punkte der zu konstruierenden Tangenten.

262α. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Parabel (x_1, y_1) und die des Berührungspunktes der Ellipse (x_2, y_2) genügen den Relationen

$$8\sqrt{3}\, a y_2 + x_2 y_1 = 0, \quad 2\sqrt{3}\, x_1 y_2 - a y_1 = 0.$$

Man erhält demnach die beiden Gleichungen

$$2y - \sqrt{3}\, x = 4a \quad \text{und} \quad 2y + \sqrt{3}\, x = -4a.$$

Die Ellipse und die Parabel besitzen also nur zwei gemeinschaftliche Tangenten.

262β. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{\sqrt{14\sqrt{3} - 24}}$, also $\angle\varphi = 76^0\, 1'\, 4''$.

263. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{-y_1 x_1 \pm \sqrt{a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x_1{}^2}\,(x - x_1).$$

Daraus folgt: Die beiden Tangenten sind nur dann reell, wenn der gegebene Punkt außerhalb der Ellipse liegt, sie fallen zusammen, wenn der Punkt der Ellipse angehört, sie sind imaginär, wenn der Punkt in der Fläche der Ellipse liegt.

Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 - a^2 b^2}}{x_1{}^2 + y_1{}^2 - (a^2 + b^2)}.$$

Beispiel. $39y + \left(24 \mp \frac{25}{2}\sqrt{3}\right) x = 309 \mp 100\sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{100\sqrt{3}}{167}, \quad \angle\varphi = 46^0\, 2'\, 42''.$$

264. $39y + \left(25\sqrt{3} \mp 2\sqrt{849}\right) x = 160\sqrt{3} \mp 5\sqrt{849}$.

265. $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$.

Beispiele. a) $63y + 20x = 36$.

b) $-4\sqrt{7}\, y + 9x = 96$ (die Polare ist Tangente der Ellipse).

c) $55y + 24x = 40$.

266. $x = \frac{a^2}{e}$, $x = -\frac{a^2}{e}$; jede dieser beiden Parallelen wird eine Direktrix der Ellipse genannt.

267. Die beiden Geraden durchschneiden sich rechtwinklig.

268. Der Brennstrahl r ist gleich $a - \frac{e}{a} x_1$, der Abstand d des Punktes von der Direktrix gleich $\frac{a^2}{e} - x_1$; daraus folgt:

$$r_1 : d = e : a.$$

269. Man erhält als Gleichung des geometrischen Ortes

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\, x^2 - 2\, n^2kx + n^2k^2 = 0,$$

d. h. der Ort ist eine Ellipse, welche den Punkt $(k, 0)$ zum Brennpunkte und die Y-Achse zur Direktrix hat.

270. Die beiden Strecken sind einander gleich.

271. $y = \frac{y_1}{x_1} x$. Die Gerade geht durch den Mittelpunkt der Ellipse. Der Halbierungspunkt wird auch dann noch reell sein, wenn die Schnittpunkte der Ellipse und der Polare imaginär sind.

272. Man bestimmt die Lage der Polare leicht mit Hilfe der Achsenabschnitte $\frac{a^2}{x_1}$ und $\frac{b^2}{y_1}$.

273. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = -\frac{La^2}{N}, \quad y_1 = -\frac{Mb^2}{N}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 5\frac{1}{3}$, $y_1 = 2$;
b) $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = 3\frac{4}{7}$.

274. Errichtet man im Brennpunkte auf der Sehne ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix, welche zu dem Brennpunkte gehört, in dem gesuchten Pole.

275. Verbindet man den Punkt P mit dem Brennpunkte F und errichtet auf dieser Verbindungslinie in F ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix d in einem zweiten Punkte der Tangente.

276. Die Gleichungen der Geraden sind:

$$y_1y + (x_1 - e)\, x - e\,(x_1 - e) = 0,$$
$$a^2y_1y + b^2x_1x - a^2b^2 = 0,$$
$$ex - a^2 = 0.$$

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - e & b^2 x_1 & e \\ y_1 & a^2 y_1 & 0 \\ -e(x_1 - e) & -a^2 b^2 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, so müssen die drei Geraden durch einen Punkt gehen.

277. Die Gerade KF entspricht der Gleichung

$$b^2 x_1 y - a^2 y_1 (x - e) = 0;$$

sie schneidet demnach die Polare des Punktes P rechtwinklig.

278. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^2 b^4,$$

d. h. die Pole liegen auf einer Ellipse, deren Halbachsen a und $\frac{b^2}{a}$ sind.

279. Der Pol rückt auf der Ellipse $a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^4 b^2$ fort, welche die Fundamentalellipse in den Endpunkten der kleinen Achse berührt.

280. Die Pole liegen auf der Ellipse

$$\frac{a^2 + b^2}{a^4} x^2 + \frac{a^2 + b^2}{b^4} y^2 = 1.$$

281. Unter Anwendung von Linienkoordinaten findet man als Gleichungen der Enveloppen:

$$\alpha)\ a^2 u^2 + \frac{b^4}{a^2} v^2 - 1 = 0,$$

$$\beta)\ \frac{a^4}{b^2} u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

$$\gamma)\ \frac{a^4}{a^2 + b^2} u^2 + \frac{b^4}{a^2 + b^2} v^2 - 1 = 0.$$

In welcher Beziehung stehen diese Resultate zu den in den drei vorhergehenden Aufgaben gefundenen?

282. Die Pole liegen auf einer Geraden, welche der Y-Achse parallel läuft; die Gleichung derselben ist $a^2 L + Nx = 0$.

283. Der geometrische Ort des Poles ist die Gerade

$$LNy - MNx - LMe^2 = 0.$$

284. Die Polaren bilden ein Büschel, dessen Mittelpunkt der Punkt $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ ist.

285. Schließt die von dem Mittelpunkte der Ellipse nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Gerade mit der Hauptachse den Winkel φ ein, so ist die Gleichung der Polare

$$a^2 y \sin\varphi + b^2 x \cos\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\varphi}\, x.$$

286. Jede dieser parallelen Sehnen wird durch den konjugierten Durchmesser halbiert. Vergl. Lösung 87.

287. $y = -\frac{b^2}{a^2 A} x + \gamma$. ($\gamma$ kann jeden beliebigen reellen Wert besitzen.)

288. $y = -\frac{b^2}{a^2 M} x$.

289. $33y + 26x - 92 = 0$.

290. Die Gleichung der Sehne ist $2y + x = 8$, die des konjugierten Durchmessers $y = \frac{1}{2}x$.

291. Die Gleichung des gesuchten Durchmessers ist

$$45y + 8x = 0,$$

derselbe schneidet die Ellipse in den Punkten

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{45}{\sqrt{151}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \mp \frac{8}{\sqrt{151}},$$

während die Endpunkte des konjugierten Durchmessers

$$x_{\frac{3}{4}} = \pm 4\sqrt{\frac{15}{151}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm 6\sqrt{\frac{15}{151}}$$

sind.

292. Man zieht zu dem Durchmesser eine parallele Sehne, halbiert dieselbe und verbindet den Halbierungspunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse.

293. Man zieht zwei parallele Sehnen, verbindet deren Halbierungspunkte und wiederholt diese Konstruktion.

294. Der Durchmesser, welcher einer der beiden Sehnen parallel läuft, halbiert die andere.

295. Über einem beliebigen Durchmesser d der Ellipse als Sehne beschreibt man einen Kreis, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt. Verbindet man einen der Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse mit den Endpunkten von d, so ist durch diese Sehnen die Richtung der gesuchten konjugierten Durchmesser bestimmt.

296. Die Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x \pm \frac{b\sqrt{a^2 M^2 + b^2}}{aM},$$

dagegen der konjugierte Durchmesser der Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x.$$

Die Tangenten sind also dem konjugierten Durchmesser parallel.

297. Zur Konstruktion bieten die Lösungen 292 und 296 das Mittel.

298. Siehe die Bemerkung unter 297.

299. Man findet leicht, daß

$$\frac{\frac{-b^2}{a^2 M_1} + \frac{b^2}{a^2 M_3}}{\frac{-b^2}{a^2 M_1} + \frac{b^2}{a^2 M_4}} : \frac{\frac{-b^2}{a^2 M_2} + \frac{b^2}{a^2 M_3}}{\frac{-b^2}{a^2 M_2} + \frac{b^2}{a^2 M_4}} = \frac{M_1 - M_3}{M_1 - M_4} : \frac{M_2 - M_3}{M_2 - M_4}$$

ist.

300. Sind $y = 0$, $x = 0$ die Gleichungen der Fundamentalstrahlen, und die für drei Strahlenpaare

$$y - M_1 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_1} x = 0,$$

$$y - M_2 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_2} x = 0,$$

$$y - M_3 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_3} x = 0,$$

so ist die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 + \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 + \frac{b^2}{a^2 M_2} & -M_3 + \frac{b^2}{a^2 M_3} \\ -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} \end{vmatrix} = 0$$

eine identische; das Büschel sonach ein involutorisches.

301. Mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 + \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 + \frac{b^2}{a^2 M_2} & 2r \\ -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} & r^2 \end{vmatrix} = 0$$

findet man $r = \pm \frac{bi}{a}\cdot$ Die beiden Doppelstrahlen sind also imaginär und entsprechen der Gleichung

$$y \pm \frac{bi}{a} x = 0.$$

302. Die gesuchte Gleichung ist

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 2 = 0,$$

d. h. die Enveloppe ist eine Ellipse, deren Halbachsen $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und $\frac{b}{\sqrt{2}}$ sind.

303. Es ist

$$2a_1 = 2ab\sqrt{\frac{1+M^2}{a^2M^2+b^2}}, \quad 2b_1 = 2\sqrt{\frac{a^4M^2+b^4}{a^2M^2+b^2}}.$$

Beispiel. $2a_1 = \frac{42}{37}\sqrt{41} = 7{,}26841,$

$2b_1 = \frac{2}{37}\sqrt{61321} = 13{,}38545.$

304. $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a^2b^2}{e^2x_1y_1}, \ \partial = \frac{2}{ab}\sqrt{a^4{y_1}^2 + b^4{x_1}^2} = 2\sqrt{a^2 - \varepsilon^2{x_1}^2}.$

Der Winkel wird ein rechter sein, wenn $e = 0$ wird, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht.

Beispiel. $\angle\varphi = 135^0\, 13'\, 32'', \quad \partial = 6{,}8.$

305. Beide Figuren haben denselben Inhalt, nämlich

$$F = a^2 - \varepsilon^2 {x_1}^2.$$

306. Man findet

$$\operatorname{tg}\alpha_{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}120^0 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^2 120^0 - 3},$$

$$\angle\beta_{\frac{1}{2}} = \angle\alpha_{\frac{1}{2}} + 120^0.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist gleich Null, demnach

$$\alpha_{\frac{1}{2}} = 30^0, \quad \beta_{\frac{1}{2}} = 150^0.$$

307. ${a_1}^2 + {b_1}^2 = a^2 + b^2, \quad a_1 b_1 \sin\varphi = ab.$

308. $2a = 14{,}69002, \quad 2b = 8{,}95538.$

309. Es ist $2a_1 = 2b_1 = \sqrt{2(a^2+b^2)}, \qquad \sin\varphi = \frac{2ab}{a^2+b^2},$

$$\angle\alpha = 90 - \frac{\varphi}{2}, \quad \angle\beta = 90 + \frac{\varphi}{2}.$$

Beispiel. $2a_1 = 2b_1 = 13{,}34166, \quad \angle\varphi = 115^0\,59'\,20'',$

$\angle\alpha = 32^0\,0'\,20'', \quad \angle\beta = 147^0\,59'\,40''.$

310. $F = 2a_1 b_1 \sin\varphi = 2ab$.

311. α) $J = 4ab$.

β) Die Richtigkeit der Behauptung findet man leicht, wenn man je zwei aufeinander folgende Berührungspunkte verbindet.

312. Durch Benutzung der Transformationsgleichungen

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\alpha_1, \quad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\alpha_1$$

erhält man

$$(a^2 \sin^2\alpha_1 + b^2 \cos^2\alpha_1)\, y_1^2 + (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, x_1^2$$
$$+ 2\,(a^2 \sin\alpha \sin\alpha_1 + b^2 \cos\alpha \cos\alpha_1)\, x_1 y_1 = a^2 b^2,$$

woraus sich

$$a_1^2 y_1^2 + b_1^2 x_1^2 = a_1^2 b_1^2$$

ergiebt.

313. $a_1^2 q^2 + b_1^2 p^2 = p^2 q^2$.

314. $a_1^2 y_1 y + b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2$.

315. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{a_1^2}{p}, \quad y_1 = \frac{b_1^2}{q}.$$

316. Es seien $2a_2$, der nach dem Berührungspunkte P gezogene Durchmesser, und $2b_2$, der demselben konjugierte, die Koordinatenachsen. Ist M die Richtungskonstante von OR, also $-\frac{b_2^2}{a_2^2 M}$ die von OS, so sind die Abschnitte der Tangente

$$PR = Ma_2, \quad PS = -\frac{b_2^2}{a_2 M},$$

demnach $PR \,.\, PS = -b_2^2$.

317. Der nach dem Berührungspunkte P gezogene Durchmesser $2a_1$ und der demselben konjugierte $2b_1$ mögen als Koordinatenachsen betrachtet werden, dann sind die Gleichungen der Tangenten

$$(KR)\ a_1^2 y_1 y + b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2,$$
$$(K_1 S)\ -a_1^2 y_1 y - b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2,$$
$$x = a_1;$$

demnach

$$PR \,.\, PS = \frac{b_1^4 (x_1^2 - a_1^2)}{a_1^2 y_1^2} = -b_1^2,$$

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten der dritten Tangente ist gleich dem Quadrate des derselben parallelen Halbdurchmessers.

318. Wird der Durchmesser $2a_1$ als X-Achse, der demselben konjugierte $2b_1$ als Y-Achse betrachtet, so ist die Gleichung der Tangente, deren Berührungspunkt P ist,

$$a_1^2 y_1 y + b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2;$$

demnach sind die Abschnitte auf den parallelen Tangenten

$$SK_1 = \frac{b_1^2(a_1 - x_1)}{a_1 y_1}, \quad RK = \frac{b_1^2(a_1 + x_1)}{a_1 y_1},$$

also

$$SK_1 \cdot RK = \frac{b_1^4(a_1^2 - x_1^2)}{a_1^2 y_1^2} = b_1^2.$$

319. Wählt man die beiden Sehnen zu Koordinatenachsen, so findet man

$$s_1 + s_2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{a}.$$

320. $$(m + n)^2 y^2 + n^2 x^2 = n^2 r^2$$

oder

$$(m + n)^2 y^2 + m^2 x^2 = m^2 r^2.$$

Beispiel. $4y^2 + x^2 = 36.$

321. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{r^2}{4}$. Die Halbierungspunkte liegen auf einer Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten $\frac{a}{2}$, 0 und deren Halbachsen $\frac{r}{2}$ und r sind.

322. $a^2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + b^2 x^2 = \frac{a^2 b^2}{4}$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind: 0, $\frac{b}{2}$, die Halbachsen: $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$.

323. Fällt die Grundlinie c mit der X-Achse zusammen und das im Halbierungspunkte derselben errichtete Lot mit der Y-Achse, so ist die Gleichung des Ortes

$$\left(\frac{u - c}{2}\right)^2 y^2 + \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right) x^2 = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right)\left(\frac{u - c}{2}\right)^2.$$

Die Endpunkte der Grundlinie sind die Brennpunkte, die Halbachsen sind:

$$\tfrac{1}{2}(u - c), \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{u(u - 2c)}.$$

324. Ist die Lage des Koordinatensystems dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung, so ist die gesuchte Gleichung

$$9y^2 + 4x^2 = c^2.$$

325. Die Lage des Koordinatensystems sei dieselbe wie in Lösung 323, dann erhält man

$$y^2 + kx^2 = \frac{kc^2}{4}.$$

326. Die Schenkel des rechten Winkels mögen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Rückt A auf der X-Achse, B auf der Y-Achse fort, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

327. $4x^2 + 2y^2 - px = 0.$

328. Die Gerade t_1 sei die X-Achse, der Punkt P_1 der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$2y^2 - dy + x^2 = 0.$$

329. Ist die Länge jedes Schenkels gleich s und wird der zweite durch den Punkt P im Verhältnis m zu n (von oben nach unten) geteilt, so bewegt sich der Punkt P auf einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{(m+n)^2y^2}{n^2} + \frac{(m+n)^2x^2}{(2m+n)^2} = s^2$$

ist.

330. Bezeichnen wir die Hälfte des veränderlichen Winkels mit φ, so ist

$$2y = (a-b)\sin\varphi, \qquad 2x = (a+b)\cos\varphi,$$

demnach die Gleichung des Ortes

$$\frac{4y^2}{(a-b)^2} + \frac{4x^2}{(a+b)^2} = 1.$$

331. Läßt man die Seite c mit dem positiven Teile der X-Achse, den Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so erhält man:

$$(a+b+c)\,y^2 + (a+b-c)\,x^2 - c\,(a+b-c)\,x = 0.$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Ellipse, deren Halbachsen

$$\frac{c}{2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}}$$

sind.

332. Die Bahn des Schwerpunktes entspricht der Gleichung

$$\frac{9\left(x-\frac{c}{3}\right)^2}{a_1^{\,2}}+\frac{9\,y^2}{b_1^{\,2}}=1.$$

Die Mittelpunktskoordinaten dieser Ellipse sind $\frac{c}{3}$, 0; die Halbachsen $\frac{a_1}{3}$ und $\frac{b_1}{3}$.

333. Der Höhenpunkt beschreibt die Ellipse

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(2\,ax-x^2),$$

deren Halbachsen a und $\frac{a^2}{b}$ sind.

334. $y^2+\frac{q}{4}x^2-\frac{p}{2}x=0.$

335. $a^2y^2+b^2x^2=b^2e^2.$

336. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Ellipse

$$e^2y^2+2b\,(a-b)\,x^2-2be\,(a-b)\,x=b^2e^2,$$

deren Halbachsen $\frac{e}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ und $\sqrt{\frac{b\,(a+b)}{2}}$ sind.

Wo liegen die Brennpunkte dieser Ellipse?

337. $r_1^{\,2}y^2+r_2^{\,2}x^2=r_1^{\,2}r_2^{\,2}.$

338. $r^2y^2+b^2x^2=r^2b^2.$

339. Ist b der Abstand des Punktes N vom Mittelpunkte des Kreises, so ist die Gleichung des Ortes

$$r^2x^2+b^2y^2=r^2b^2.$$

340. $y^2+2x^2-4rx=0.$

Die Halbachsen dieser Ellipse sind r und $2r$.

341. $4y^2+x^2-4rx=0.$

Halbachsen: $2r$ und r.

342. $16y^2-48y+25x^2=64.$

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind: 0, $\frac{3}{2}$; die Halbachsen: 2 und 2,5.

343. $9y^2 + 8x^2 - 4rx = 4r^2$.

Die Mittelpunktskoordinaten der Ellipse sind: $\frac{r}{4}$, 0, die Halbachsen: $\frac{3}{4}r$ und $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

344. Man erhält:

$$25y^2 + 24x^2 - 24x = 144.$$

Die Mittelpunktskoordinaten der Ellipse sind: $\frac{1}{2}$, 0, die Halbachsen: $\frac{5}{2}$, $\sqrt{6}$.

345. Die Gleichung des Ortes ist

$$9y^2 + 8x^2 - 8x = 16,$$

d. h. eine Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten $\frac{1}{2}$, 0 und deren Halbachsen $\frac{3}{2}$ und $\sqrt{2}$ sind.

346. In der Anfangslage berühre der bewegte Kreis den festen in dem positiven Teile der X-Achse und der Punkt P sei um $\frac{a}{2}$ vom Berührungspunkte entfernt, dann ist die Gleichung der Kurve, welche der Punkt P beschreibt,

$$\frac{4x^2}{9a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1.$$

347. Die Gleichung einer Polare bezüglich des gegebenen Kreises hat die Gestalt

$$(x - r)(x_1 - r) + yy_1 = 2r^2,$$

worin x_1, y_1 die Koordinaten des zugehörigen Poles sind.

Soll die Polare zugleich Tangente der Parabel sein, so müssen die Größen x_1, y_1 der Relation

$$y_1^2 + 2x_1^2 = 2r^2$$

genügen. Der Pol beschreibt demnach eine Ellipse.

348. Man benutzt die Relationen $FP + F_1P = 2a$ und $a^2 = b^2 + \left(\frac{FF_1}{2}\right)^2$.

349. Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade AB gefällten Lotes und F_1 der zu CD gehörige Brennpunkt, so bilden DBF_1A vier harmonische Punkte. Ist die Aufgabe unter allen Umständen lösbar?

350. Fällt man von F und F_1 Lote auf t, so sind die beiden Fußpunkte Punkte des Hauptkreises. Verlängert man ferner eins dieser Lote über den Fußpunkt hinaus um sich selbst, und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit dem andern Brennpunkte, so erhält man in dieser Verbindungslinie einen geometrischen Ort des Berührungspunktes.

Determination. Die Lösung ist nur dann möglich, wenn t die Verbindungslinie der beiden Punkte F und F_1 nicht durchschneidet.

351. Determination. Man erhält nur eine Lösung.

352. Man bestimme zunächst die Lage des zweiten Brennpunktes und somit die Richtung der Hauptachse.

353. Man konstruiert mit Leichtigkeit zwei geometrische Örter des Brennpunktes F_1.

354. Hat man den zweiten Brennpunkt und die Achsen gefunden, so läßt sich Lage und Länge des konjugierten Durchmessers bestimmen, indem man geometrische Örter für die Endpunkte desselben konstruiert.

355. Man benutze zur Lösung entweder den Satz: Die Fußpunkte der Lote, welche man von dem Brennpunkte auf die gegebenen Tangenten fällen kann, sind Punkte des Hauptkreises, oder man konstruiere geometrische Örter für den zweiten Brennpunkt.

356. Siehe die vorhergehende Lösung.

357. Von F_1 fälle man Lote auf t_1 und t_2, deren Fußpunkte Q_1 und Q_2 heißen mögen, und beschreibe über P_1F_1 als Durchmesser einen Kreis. Der Hauptkreis der Ellipse wird durch die Punkte Q_1 und Q_2 gehen und den Kreis über P_1F_1 berühren.

358. Vergleiche die vorhergehende Lösung.

359. Konstruiere den Hauptkreis, verbinde P mit dem Brennpunkte F, schlage über dieser Linie als Durchmesser einen Kreis und verbinde die Schnittpunkte beider Kreise mit P. Sind auf diese Weise die Richtungen der Tangenten gefunden, so bestimmt man leicht die Berührungspunkte, indem man die Gegenpunkte der Brennpunkte zu Hilfe nimmt.

360. Man suche mit Hilfe paralleler Sehnenscharen den Mittelpunkt, ziehe einen beliebigen Durchmesser und bestimme mit Hilfe rechtwinkliger Supplementarsehnen die Richtungen der Achsen. Für die letzte Frage siehe die vorhergehende Lösung.

361. Man errichte im Mittelpunkte auf der Hauptachse, welche der Richtung nach gegeben ist, ein Lot und konstruiere mit Hilfe von Lösung 253 einen geometrischen Ort für die Brennpunkte. Zur Konstruktion der Direktrixen bietet Lösung 275 das Mittel.

362. Geometrische Örter der Brennpunkte lassen sich mit Leichtigkeit konstruieren.

363. Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn die gegebene Tangente von dem Hauptkreise geschnitten wird.

364. Man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes PK über P hinaus bis zum Schnitt mit dem Hauptkreise in L, verbinde L mit dem Mittelpunkte O und ziehe durch P eine Parallele zur Hauptachse, welche den Radius OL in R schneidet, dann ist OR gleich der kleineren Halbachse.

365. Zur Bestimmung der Längen der Achsen lassen sich die Relationen

$$a^2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_2 + y_1},$$

$$b^2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}$$

verwerten. Die Lösung ist nur möglich, wenn die Differenzen $x_1{}^2 - x_2{}^2$ und $y_2{}^2 - y_1{}^2$ dasselbe Vorzeichen besitzen.

366. Verbindet man den Schnittpunkt der Tangenten t_1, t_2 mit dem Halbierungspunkte von P_1P_2, so erhält man einen geometrischen Ort des Mittelpunktes. Für die Fortsetzung der Konstruktion siehe die vorige Lösung.

367. Man zieht durch den Punkt P eine Parallele zur Hauptachse, welche den über der kleineren Achse als Durchmesser konstruierten Kreis in L schneidet. Die Verlängerung des Radius OL durchschneidet dann die Verlängerung der Ordinate von P in einem Punkte des Hauptkreises.

Determination. Die Lösung ist nur möglich, wenn P außerhalb des Kreises über der kleineren Achse liegt und wenn die Parallele durch P zur Hauptachse diesen Kreis schneidet.

368. Determination. Die Konstruktion ist unmöglich, wenn der Hauptkreis die Tangente t nicht durchschneidet.

369. Man ziehe durch B eine Parallele zu AA_1, welche Tangente der Ellipse sein wird, errichte im Berührungspunkte B auf derselben ein Lot $= a_1$ und konstruiere einen Kreis, der durch

den Endpunkt des Lotes und den Schnittpunkt O der konjugierten Durchmesser geht, dessen Mittelpunkt in der Tangente liegt. Verbindet man den Punkt O mit den Schnittpunkten des Kreises und der Tangente, so erhält man die Richtungen der Achsen. Vergl. Lösung 316. Welches ist die Richtung der Hauptachse?

370. Bei der Konstruktion berücksichtige man Lösung 276. Determination. Direktrix und Polare müssen konvergent sein.

371. Nach Lösung 247 lassen sich im Falle α_1 und β_1 leicht zwei geometrische Örter des zweiten Brennpunktes finden.

372. $J = ab\pi$.

Beispiel. $J = 6\pi = 18,849556 \ldots \square$.

373. $J = 17,85357\pi \square$.

374. $J = \frac{s^2}{\sqrt{5}}\pi = 1,40496 \cdot s^2$.

375. Eine einfache geometrische Betrachtung führt zu dem Resultate

$$\underset{(e)}{\text{Segm.}} : \underset{(k)}{\text{Segm.}} = b : a.$$

376. Mit Hilfe der vorhergehenden Lösung findet man leicht

$$\underset{(e)}{\text{Sect.}} : \underset{(k)}{\text{Sect.}} = b : a.$$

377. Sect. $= \frac{5}{2}\pi = 7,8539815 \square$.

378. Sect. $= \frac{\sqrt{55}\pi}{24} = 0,97078 \square$.

379. Die Inhalte der Segmente sind:

$$F_1 = 1,16883 \square, \quad F_2 = 64,80467 \square.$$

380. Man erhält:

$$F_1 = \tfrac{4}{9}\alpha\pi - 8,75\sqrt{15} = 6,54 \square,$$

$$F_2 = 80\pi - F_1 = 245,787408 \square \quad \left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}\right).$$

381. Man findet:

$$F_1 : F_2 = 4\pi - 3\sqrt{3} : 8\pi + 3\sqrt{3}.$$

382. Die beiden äußeren Teile sind einander gleich:

$$F_1 = F_3 = 3,1604 \square,$$

der mittlere Teil:

$$F_2 = 40,832 \square.$$

383. Man erhält:

$$F_1 = 27,97574 \square, \quad F_2 = 34,856112 \square.$$

Die Hyperbel.

384. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - e^2),$$

oder wenn $e^2 - a^2$ gleich b^2 gesetzt wird,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -\,a^2b^2.$$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

385. $64y^2 - 49x^2 = -\,3136.$

386. $25y^2 - 144x^2 = -\,3600.$

387. $y^2 - 8x^2 = -\,8a^2.$

Da man a jeden beliebigen Wert beilegen kann, so entspricht dieser Gleichung ein System von Hyperbeln.

388. $84y^2 - 625x^2 = -\,10000.$

389. Man erhält

$$\frac{y_1{}^2x_2{}^2 - y_2{}^2x_1{}^2}{y_1{}^2 - y_2{}^2}\,x^2 - \frac{y_1{}^2x_2{}^2 - y_2{}^2x_1{}^2}{x_1{}^2 - x_2{}^2}\,y^2 = -\,\frac{(y_1{}^2x_2{}^2 - y_2{}^2x_1{}^2)^2}{(y_1{}^2 - y_2{}^2)\,(x_1{}^2 - x_2{}^2)}.$$

Beispiel. $7x^2 - 3y^2 = 148.$

390. Die Relationen zwischen den Konstanten sind anzugeben.

391. $x = y = \pm\,\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$

Die Hyperbel kann nur dann Punkte besitzen, deren Koordinaten dieser Anforderung genügen, wenn $b^2 > a^2$ ist.

392. $p = \dfrac{2b^2}{a}.$

393. Die Hyperbel, welche der Aufgabe genügt, entspricht der Gleichung

$$\left\{\frac{p^2}{8} + e^2 - \frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}}\right\}y^2 - \left\{\frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}} - \frac{p^2}{8}\right\}x^2$$

$$= -\left\{\frac{p^2}{8} + e^2 - \frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}}\right\}\left\{\frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}} - \frac{p^2}{8}\right\}.$$

Beispiel.

$$(33 - 4\sqrt{29})\,y^2 - \{4\sqrt{29} - 8\}\,x^2 = -\,(33 - 4\sqrt{29})\,(4\sqrt{29} - 8).$$

394. Es ist $x - a : y = y : x + a$, d. h. jede Ordinate ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen ihres Fußpunktes von den Scheiteln der Hyperbel. Wie lassen sich demnach die einzelnen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel durch Konstruktion finden, wenn die Hauptachse derselben gegeben ist?

395. Die Gleichungen der Brennstrahlen sind:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - e}(x - x_1) \text{ und } y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + e}(x - x_1),$$

die Längen derselben:

$$PF = \frac{e x_1}{a} - a = \varepsilon x_1 - a,$$

$$PF_1 = \frac{e x_1}{a} + a = \varepsilon x_1 + a.$$

Beispiel. $y - \frac{8}{3}\sqrt{5} = -\frac{2}{3}\sqrt{5}\left(\sqrt{29} + 5\right)(x - 5),$

$$y - \frac{8}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{5}\left(\sqrt{29} - 5\right)(x - 5).$$

$$PF = 5{,}97527, \quad PF_1 = 11{,}97527.$$

396. Aus der vorhergehenden Lösung folgt:

$$PF + PF_1 = 2\varepsilon x_1,$$

d. h. die Summe der beiden Brennstrahlen wird erhalten, wenn man die Abscisse mit der doppelten numerischen Excentricität multipliziert.

397. $\angle \varphi = 24^0\, 11'\, 57''$.

398. Man erhält vier Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = + a\sqrt{\frac{a^2 - 2e^2}{2a^2 - e^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{a^4 - e^4}{2a^2 - e^2}},$$

$$x_{\frac{3}{4}} = - a\sqrt{\frac{a^2 - 2e^2}{2a^2 - e^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{a^4 - e^4}{2a^2 - e^2}}.$$

399. Man erhält vier Punkte, deren Brennstrahlen der Anforderung genügen; die Koordinaten derselben sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = 10{,}4487, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm 2{,}4132,$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -10{,}4487, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp 2{,}4132.$$

400. Es ist $t_1 : y_1 = a : b$, für die gleichseitige Hyperbel demnach $t_1 = y_1$.

401. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{y_1}$.

402. $49y^2 + 392y - 100x^2 + 1000x + 3184 = 0.$

403. $y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$ oder $y^2 = px + qx^2.$

404. Die Achsen der Hyperbel sind:

$$2a = 12, \quad 2b = 14.$$

405. Die Hauptachse der Hyperbel ist $2a = \frac{p x_1^2}{y_1^2 - p x_1}$, die Scheitelgleichung $y^2 = px + \frac{y_1^2 - p x_1}{x_1^2} x^2.$

406. $y^2 = \frac{2b^2}{\sqrt{e^2 - b^2}} x + \frac{b^2}{e^2 - b^2} x^2.$

407.
$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}}$$

oder

$$r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \vartheta - 1}}.$$

408. Man erhält, wenn man den rechtsliegenden Brennpunkt als Pol annimmt:

$$\varrho = \frac{b^2}{\pm a - e \cos \varphi},$$

d. h. für jeden Wert von φ zwei Werte von ϱ:

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varrho = \frac{-\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Der Radiusvektor kann nur positive Werte besitzen. Der Endpunkt desselben beschreibt demnach, wenn a das positive Vorzeichen hat, den rechts liegenden Hyperbelzweig, und wenn a das negative Vorzeichen hat, den links liegenden Hyperbelzweig.

Ist der links liegende Brennpunkt der Pol, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{b^2}{\pm a + e \cos \varphi},$$

also

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varrho = \frac{-\frac{1}{2}p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

409. Da die Anomalien φ und $\pi + \varphi$ sind, so ergiebt sich

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\frac{1}{4}p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$$

oder

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \tfrac{1}{4}p\,(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Vergl. Lösung 200.

410. Es ist

a) $\varrho = p$ für $\cos\varphi = -\frac{1}{2\varepsilon}$ und für $\cos\varphi = \frac{3}{2\varepsilon}$,

b) $\varrho = 2a$ für $\cos\varphi = \frac{\varepsilon^2 - 3}{2\varepsilon}$ und für $\cos\varphi = \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$,

c) $\varrho = 2e$ für $\cos\varphi = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon^2}$ und für $\cos\varphi = \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon^2}$.

411. Man findet

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{\frac{1}{2}p} + \frac{1-\varepsilon\cos\varphi}{\frac{1}{2}p}\right) = \frac{2}{p}.$$

412.
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2-\varepsilon^2}{p},$$

d. h. zieht man in einer Hyperbel zwei sich rechtwinklig schneidende Brennpunktsehnen, so ist die Summe ihrer reciproken Werte konstant.

413. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{Mna^2 \pm ab\sqrt{b^2 + n^2 - a^2M^2}}{b^2 - a^2M^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{nb^2 \pm abM\sqrt{b^2 + n^2 - a^2M^2}}{b^2 - a^2M^2}.$$

Beispiele. 1. $x_{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{17}$, $y_{\frac{1}{2}} = -3\frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{17}$.

2. $x_{\frac{1}{2}} = 5$, $y_{\frac{1}{2}} = -6\frac{2}{3}$. Die Gerade ist eine Tangente der Hyperbel.

3. $x_{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{16} \pm \frac{3}{16}i\sqrt{35}$, $y_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}i\sqrt{35}$.

414. Nimmt man mit der Relation $b^2 + n^2 - a^2M^2 \gtreqless 0$ eine ähnliche Umformung vor wie in Lösung 208, so gelangt man zu dem Resultate:

Die Gerade schneidet die Hyperbel in zwei reellen Punkten, wenn der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes außerhalb der Fläche des Hauptkreises, in zwei imaginären Punkten, wenn der Fußpunkt des Lotes in der Kreisfläche liegt. Die Gerade ist dagegen Tangente der Hyperbel, wenn der Fußpunkt des Lotes sich auf der Peripherie des Hauptkreises befindet.

415. Man erhält

$$x_1 = -\frac{a(b^2+n^2)}{2bn}, \quad y_1 = \frac{n^2-b^2}{2n},$$

$$x_2 = \infty, \quad y_2 = \infty;$$

ferner

$$x_3 = \frac{a(b^2+n^2)}{2bn}, \quad y_3 = \frac{n^2-b^2}{2n},$$

$$x_4 = \infty, \quad y_4 = \infty.$$

Jede der Geraden schneidet die Hyperbel in einem endlichen Punkte, aber außerdem noch in einem unendlich fernen Punkte.

Wird $n = 0$ gesetzt, so berührt jede der Geraden die Hyperbel in einem unendlich fernen Punkte. Diese beiden Geraden werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

416. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}, \quad y_{\frac{1}{2}} = 9 \pm \frac{6}{5}\sqrt{5}.$

417. $a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0.$

418. Man erhält

$$-\frac{1}{u} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{r^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - 4k^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$-\frac{1}{v} = \pm \frac{1}{2\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{r^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - 4k^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

aus denen sich durch Elimination von $\operatorname{tg}\varphi$

$$\frac{r^2}{4}u^2 - \frac{(4k^2-r^2)}{4}v^2 - 1 = 0$$

ergiebt. Die Enveloppe ist demnach eine Hyperbel mit den Achsen r und $\sqrt{4k^2-r^2}$.

419. Die Enveloppe ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$r^2u^2 - (x_1{}^2 - r^2)v^2 - 1 = 0$$

entspricht.

420. Die Gleichung der Enveloppe in Linienkoordinaten ist

$$d^2v^2 - (f^2-d^2)u^2 - 1 = 0.$$

Wie liegt die Hyperbel, welche dieser Gleichung entspricht?

421. Die X-Achse wird in den Punkten

$$x_1 = -1 + \frac{3}{5}\sqrt{34}, \quad x_2 = -1 - \frac{3}{5}\sqrt{34},$$

die Y-Achse in den Punkten

$$y_1 = 3 + \frac{10}{3}i\sqrt{2}, \quad y_2 = 3 - \frac{10}{3}i\sqrt{2}$$

geschnitten.

Die Gleichung der Hyperbel in Linienkoordinaten ist

$$34v^2 - 8u^2 - 6uv + 6v - 2u + 1 = 0.$$

422. Die Gleichung der Sehne ist

$$9y - 64x + 741 = 0.$$

Dieselbe schneidet auf dem positiven Teile der X-Achse das Stück $11\frac{37}{64}$, auf dem negativen Teile der Y-Achse das Stück $82\frac{1}{3}$ ab. Der Neigungswinkel der Sehne zur X-Achse ist

$$\angle\varphi = 81^0\,59'\,43''.$$

423. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{134}}{5}\,x.$$

424. Die Koordinaten der Ecken sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Die Lösung ist nur möglich, wenn $b^2 > a^2$ ist.

425. Die Gleichungen der Seiten sind entweder

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad x = \tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{10}{3}} + \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2}};$$

oder

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right),$$

$$x = -\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{10}{3}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2}}.$$

426. $$x_{\frac{1}{2}} = +2\sqrt{2 + 2\sqrt{\tfrac{55}{7}}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\tfrac{14}{3} + \tfrac{14}{3}\sqrt{\tfrac{55}{7}}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -2\sqrt{2 + 2\sqrt{\tfrac{55}{7}}}, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\sqrt{\tfrac{14}{3} + \tfrac{14}{3}\sqrt{\tfrac{55}{7}}}.$$

427. $$x_{\frac{1}{2}} = \frac{abn}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{abm}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{abn}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{abm}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}.$$

Beispiel. $$x_{\frac{1}{2}} = \tfrac{10}{3}\sqrt{15}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\tfrac{4}{3}\sqrt{15};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\tfrac{10}{3}\sqrt{15}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\tfrac{4}{3}\sqrt{15}.$$

428. Die Gleichung der Tangente ist $a^2 y_1 y - b^2 x_1 x = -a^2 b^2$, der Abschnitt auf der X-Achse ist $= \frac{a^2}{x_1}$, der auf der Y-Achse $= -\frac{b^2}{y_1}$.

Beispiele. a) $2\sqrt{3}y - \sqrt{5}x + \sqrt{5} = 0$.

b) $3\sqrt{7}y - 16x - 28 = 0$.

429. $x_1 = -\frac{Ma^2}{n}$, $y_1 = -\frac{b^2}{n}$.

430. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind:

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 3.$$

431. Die Fußpunkte liegen auf der Peripherie des Hauptkreises

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Vergl. die Lösungen 414 und 419.

432. Die Gleichung ist

$$y^2 + (x + e)^2 = 4a^2,$$

d. h. die Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt und dessen Radius gleich der Hauptachse $2a$ ist.

433. Man erhält zwei Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}}.$$

Die Punkte sind nur dann reell, wenn der absolute Wert von $\operatorname{tg} \alpha > \frac{b}{a}$ ist.

Beispiel. $x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{100}{\sqrt{97}}$, $y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{9}{\sqrt{291}}$.

434. Man verbinde den gegebenen Punkt P mit einem der Brennpunkte und beschreibe über dieser Geraden als Durchmesser einen Kreis. Die Punkte, in welchen dieser den Hauptkreis der Hyperbel schneidet, verbinde man mit dem Punkte P. Vergl. Lösung 431.

Determination. Liegt der Punkt P außerhalb der Hyperbel, so lassen sich zwei reelle Tangenten ziehen, liegt er in der Hyperbelfläche, so sind die beiden Tangenten imaginär. Befindet sich der Punkt P auf der Hyperbel, so ist nur eine Tangente möglich. Warum?

435. Man fälle von einem Brennpunkte der Hyperbel ein Lot auf die gegebene Gerade g. Durch die Punkte, in denen dieses Lot den Hauptkreis schneidet, ziehe man Parallelen zu der Geraden g.

436. Zwei Gerade genügen der Aufgabe. Dieselben entsprechen der Gleichung

$$y = 4x \mp 8\sqrt{2}.$$

437. $l_1 \cdot l_2 = -b^2$. Vergl. Lösung 247.

438. Die Hyperbel wird von den Kreisen

$$x^2 + y^2 \mp \frac{2e}{\operatorname{tg}\alpha} y - \varepsilon^2 = 0$$

in den gesuchten Berührungspunkten geschnitten. Wieviel Tangenten lassen sich konstruieren?

Beispiel. Man erhält in diesem Falle vier Tangenten, deren Gleichungen sind:

$$\pm 7y - 5\sqrt{7}x = -28,$$
$$\pm 7y + 5\sqrt{7}x = -28.$$

439. $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$.

Beispiel. $26y + 15x = 694{,}2$.

440. $\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{b x_1}\sqrt{e^2 x_1{}^2 - a^4} = \frac{a y_1}{b x_1}\sqrt{r_1 r_2}$,

$$\mathrm{N} = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x_1{}^2 - a^4} = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2},$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{a^2 y_1{}^2}{b^2 x_1} = \frac{x_1{}^2 - a^2}{x_1}, \quad \mathrm{Sbn} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel erhält man:

$$\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{2x_1{}^2 - a^2} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{r_1 r_2}, \quad \mathrm{N} = \sqrt{2x_1{}^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2},$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{y_1{}^2}{x_1}, \qquad \mathrm{Sbn} = x_1.$$

Beispiel. $\mathrm{Tg} = \frac{3}{4}\sqrt{47}$, $\mathrm{N} = \frac{4}{7}\sqrt{319}$,
$\mathrm{Sbtg} = 2\frac{1}{4}$, $\mathrm{Sbn} = 9\frac{1}{7}$.

441. $\mathrm{N} = \frac{2b}{a}\sqrt{e(e + a)}$.

Beispiel. $\frac{16}{3}\sqrt{10}$.

442. $x_{\frac{1}{2}} = 4{,}8, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{119}.$

443. Die Koordinaten der Punkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Die Hyperbel besitzt solche Punkte nicht, wenn $b^2 > a^2$ ist. Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so liegen die betreffenden Punkte in der Unendlichkeit.

444. $$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}.$$

Determination?

445. Die Abscissen der gesuchten Punkte sind gleich den Wurzeln der Gleichung

$$x_1^4 (a^4 - b^2 e^2) - x_1^2 (2a^6 - a^4 b^2) + a^8 = 0,$$

nämlich $$x = \pm a^2 \sqrt{\frac{2a^2 - b^2 \pm b^2\sqrt{5}}{2(a^4 - b^2 e^2)}},$$

446. Bezeichnet man die Winkel, welche die Radienvektoren r_1 und r_2 mit der Tangente einschließen, mit α_1 und α_2, so findet man leicht $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{b^2}{e y_1}$.

447. Über die Konstruktion siehe die vorhergehende Aufgabe.

448. Aus den Lösungen 236 und 446 folgt, daß die Tangenten beider Kurven in jedem Schnittpunkte lotrecht zu einander stehen. Eine Ellipse wird also von einer konfokalen Hyperbel rechtwinklig durchschnitten.

449. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = 4\sqrt{5}$, demnach $\angle \varphi = 83^0\, 37'\, 14{,}3''$.

450. $L \cdot N = -\frac{b^2 r_1}{a}$. [$r_1$ ist der von dem Brennpunkte $(e, 0)$ nach dem Punkte (x_1, y_1) gezogene Radiusvektor.]

451. Die gesuchten Punkte sind die Brennpunkte, denn in diesen schneidet der über der dritten Tangente konstruierte Kreis

$$\left(y+\frac{b^2}{y_1}\right)^2+x^2=\frac{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}{a^2y_1{}^2}$$

die Hauptachse.

452. $\cos\varphi=\frac{a^4y_1y_2+b^4x_1x_2}{\sqrt{(a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2)(a^4y_2{}^2+b^4x_2{}^2)}}.$

Beispiel. $\angle\varphi=3^0\,34'\,40''.$

453. Der Scheitel des rechten Winkels beschreibt den Kreis

$$x^2+y^2=a^2-b^2;$$

derselbe wird nur dann reell sein, wenn $a^2>b^2$ ist.

Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so schrumpft der Kreis in den Koordinatenanfangspunkt zusammen. Die Schenkel des rechten Winkels sind dann die Asymptoten der Hyperbel.

454. Man erhält zwei Tangenten, welche der Gleichung

$$y-y_1=\frac{y_1x_1\pm\sqrt{a^2y_1{}^2-b^2x_1{}^2+a^2b^2}}{x_1{}^2-a^2}(x-x_1)$$

entsprechen.

Welche Lage muß der Punkt $P(x_1, y_1)$ haben, wenn die beiden Tangenten reell sein sollen?

Beispiel. $y+x(2\pm\sqrt{14})=9\pm2\sqrt{14}.$

455. Man erhält $y=\pm\frac{b}{a}x.$

Beispiel. $y=\pm\frac{7}{5}x.$

456. $y=\pm\frac{b}{a}x.$ Vergl. Lösung 415.

Beispiel. $y=\pm\frac{9}{2}x.$

457. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, also $\angle\varphi=83^0\,37'\,14''.$

458. Jedes der Lote ist gleich b, der Inhalt des Vierecks demnach gleich ab.

459. Man setzt: $x=(x_1+y_1)\cos\alpha,$

$$y=(y_1-x_1)\sin\alpha,$$

und erhält, da $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{b^2}{a^2}$ ist,

$$x_1y_1=\frac{a^2+b^2}{4}=\left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

460. Die Gleichung der Tangente ist

$$y_1 x + x_1 y = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

oder, da $y_1 x_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist,

$$y_1 x + x_1 y = 2 x_1 y_1.$$

461. Der Inhalt des Rechtecks ist gleich e^2.

462. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$M(a^2 + b^2) + n^2 = 0.$$

463. Man verbindet entweder den Punkt $(2x_1, 0)$ oder den Punkt $(0, 2y_1)$ mit dem gegebenen Berührungspunkte.

464. Die Richtigkeit ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung der Tangente (Lösung 460) aus einer einfachen geometrischen Betrachtung.

465. $J = 4 x_1 y_1 \frac{ab}{a^2 + b^2} = ab$. Die Tangente begrenzt demnach mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt.

$$J : x_1 y_1 = 4ab : a^2 + b^2.$$

466. $J = \frac{ab}{2}$.

467. Die Gleichung ist $uv = \frac{1}{a^2 + b^2}$.

468. Die Gleichung der Polare ist

$$a^2 y_1 y - b^2 x_1 x = -a^2 b^2.$$

Beispiele. a) $99y - 25x + 225 = 0$,
b) $12y + 9x + 16 = 0$.

469. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = -\frac{a^2 b^2 x_1 \pm a^2 y_1 \sqrt{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + a^2 b^2}}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{a^2 b^2 y_1 \pm b^2 x_1 \sqrt{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + a^2 b^2}}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}.$$

Beispiel. $x_{\frac{1}{2}} = -\frac{6(11 \pm 3\sqrt{19})}{5}$,

$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{11(9 \pm 2\sqrt{19})}{5}.$$

470. $y_1 x + x_1 y = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

471. Man erhält

$$x = \frac{a^2}{e}, \quad x = -\frac{a^2}{e}.$$

Jede dieser Geraden wird eine Direktrix der Hyperbel genannt.

Sind die Asymptoten die Koordinatenachsen, so findet man

$$x + y = a, \quad x + y = -a.$$

472. Jeder der Abschnitte ist gleich $2a$.

473. Die Längen der Linien sind

$$\frac{ex_1 - a^2}{a} \text{ und } \frac{ex_1 - a^2}{e},$$

oder

$$\frac{ex_1 + a^2}{a} \text{ und } \frac{ex_1 + a^2}{e};$$

je zwei zusammengehörige Linien verhalten sich also wie $e:a$, wo $e > a$ ist.

474. $n^2 y^2 - (m^2 - n^2) x^2 - 2kn^2 x = -k^2 n^2$.

Der Ort ist eine Hyperbel. $(k, 0)$ ist ein Brennpunkt derselben, die Y-Achse die zugehörige Direktrix. Wie groß sind die Achsen?

475. Legt man die Asymptotengleichung zu Grunde, so findet man, daß jede der beiden Geraden gleich $x_1 + y_1 - a$ ist.

476. Der Strahl steht im Brennpunkte lotrecht zur Polare.

477. Verbindet man P mit einem Brennpunkte und errichtet auf dieser Linie im Brennpunkte ein Lot, so schneidet dieses die zugehörige Direktrix in einem zweiten Punkte der Tangente.

478. Die beiden Strecken sind einander gleich.

479. Da

$$\begin{vmatrix} x_1 - e & -b^2 x_1 & e \\ y_1 & a^2 y_1 & 0 \\ -e(x_1 - e) & a^2 b^2 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist der Inhalt des Dreiecks ebenfalls gleich Null. Die drei Geraden gehen durch einen Punkt.

480. $x_1 = -\frac{La^2}{N}, \quad y_1 = \frac{Mb^2}{N}.$

Beispiele. a) $x_1 = \frac{3}{4}, \quad y_1 = 5;$
b) $x_1 = -6\frac{1}{4}, \quad y_1 = -12.$

481. Man erhält die Gleichung des Ortes

$$a^4y^2 + b^4x^2 = a^2b^4.$$

Die Pole liegen also auf einer Ellipse, deren Halbachsen a und $\frac{b^2}{a}$ sind.

482. Der Pol bewegt sich auf der Ellipse

$$\frac{e^2x^2}{a^4} + \frac{e^2y^2}{b^4} = 1$$

fort.

483. Der geometrische Ort des Poles ist eine Ellipse, welche der Gleichung

$$\frac{a_1^2}{a^4}x^2 + \frac{(a_1^2 - e^2)}{(e^2 - a^2)^2}y^2 = 1$$

entspricht.

484. Die Pole liegen auf der Geraden

$$LNy - MNx = LMe^2.$$

Vergl. Lösung 283.

485. Die Enveloppe ist eine Ellipse, deren Gleichung in Linienkoordinaten ist:

$$\frac{a^4}{a^2 - b^2}u^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}v^2 - 1 = 0.$$

486. Man erhält

$$a^2a_1^2y_1\,(b^2 - b_1^2)\,u + b^2b_1^2x_1\,(a^2 - a_1^2)\,v = x_1y_1\,(a_1^2b^2 - a^2b_1^2).$$

Die Polaren bilden also ebenfalls ein Büschel.

487. $y = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\varphi}x$; φ ist der Winkel, unter dem die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Pole gerichtete Gerade gegen die X-Achse geneigt ist.

488. Jede dieser Sehnen wird halbiert. Vergl. Lösung 87.

489. Sind M_1, M_2 die Richtungskonstanten, so ist

$$M_1M_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel erhält man $M_1M_2 = 1$.

490. Die Bedingungsgleichung heißt: $A_1 = -A_2$.

491. Aus Lösung 489 folgt, daß der konjugierte Durchmesser mit derselben Asymptote zusammenfällt.

492. Das Büschel ist ein involutorisches, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 - \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 - \frac{b^2}{a^2 M_2} & -M_3 - \frac{b^2}{a^2 M_3} \\ \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} \end{vmatrix}$$

den Wert Null hat. Die Parameter der Doppelstrahlen entwickelt man mit Hilfe der Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 - \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 - \frac{b^2}{a^2 M_2} & 2k \\ \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} & k^2 \end{vmatrix} = 0;$$

die Wurzeln derselben sind $k_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b}{a}$. Die Asymptoten der Hyperbel sind demnach die Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels.

493. Da das Produkt $M_1 M_2$ gleich $\frac{b^2}{a^2}$, also stets positiv ist, so schließen die konjugierten Durchmesser entweder beide spitze oder beide stumpfe Winkel mit der Hauptachse ein.

Ist $M_1 < \frac{b}{a}$, so ist $M_2 > \frac{b}{a}$ u. s. f. Daraus folgt: Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel in zwei reellen Punkten, der andere in zwei imaginären Punkten. Der erste wird ein Hauptdurchmesser, der zweite ein Nebendurchmesser der Hyperbel genannt.

494. a) $16y - 75x = 0$.

b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{209}{123}$, also $\angle\varphi = 59^0\,30'\,21''$.

495. $12y - 245x + 1189 = 0$.

496. $2b_1 = 2\sqrt{\frac{a^4 M^2 + b^4}{a^2 M^2 - b^2}}$.

Beispiel. $2b_1 = \frac{10}{3}\sqrt{3}$.

497. Man erhält zwei Paare von Durchmessern, deren Gleichungen sind:

$$y = \frac{\sqrt{3281} - 41}{32} x, \quad y = \frac{\sqrt{3281} + 41}{32} x,$$

und

$$y = -\frac{(\sqrt{3281} + 41)}{32} x, \quad y = -\frac{(\sqrt{3281} - 41)}{32} x.$$

498. Man zieht durch P den Durchmesser und konstruiert den dazu konjugierten. Die gesuchte Tangente läuft dem letzteren parallel.

499. Die Berührungspunkte sind mit Hilfe zweier konjugierten Durchmesser zu finden. (Vergl. die vorhergehende Lösung.)

500. Der geometrische Ort der Punkte ist ebenfalls eine Hyperbel; die Gleichung derselben ist

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Diese und die ursprüngliche Hyperbel werden konjugierte genannt.

501. Die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbeln sind

$$y = +\frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Konjugierte Hyperbeln haben demnach die Asymptoten gemein.

502. Sind (x_1, y_1) die Koordinaten des Punktes der ersten Hyperbel, so ist

$$r_1 + r_2 = r_1{}^1 + r_2{}^1 = \frac{2ex_1}{a}.$$

503. Berechnet man die Koordinaten der Punkte, in welchen die Tangente von den Asymptoten geschnitten wird, so findet man, daß der Abschnitt der Tangente

$$t = 2\sqrt{\frac{a^4M^2 + b^4}{b^2 - a^2M^2}}$$

ist. Vergleicht man dieses Resultat mit dem in Lösung 496 gefundenen, so ergiebt sich, dass der Abschnitt der Tangente gleich dem Nebendurchmesser ist.

504. Es ist $s = \frac{2ab^2(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)}{a^2\mathrm{tg}^2\varphi - b^2}$, demnach

$$2a : d = d : s.$$

Wie gestaltet sich das Resultat für die Ellipse?

505. a) $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2$,

b) $ab = a_1 b_1 \sin \varphi$.

506. Es ist $a_1^2 = \frac{a^2(1+M^2)}{1-M^2}$, $b_1^2 = -\frac{a^2(1+M^2)}{1-M^2}$.

Je zwei konjugierte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel sind demnach gleich.

507. $2a = \sqrt{2(\sqrt{3026} - 24)}$, $2b = \sqrt{2(\sqrt{3026} + 24)}$.

508. Man zieht durch die beiden Endpunkte eines jeden Durchmessers Parallelen zu dem andern, dann sind die Diagonalen des so entstandenen Parallelogramms die gesuchten Asymptoten. Auf welche früheren Lösungen stützt sich diese Konstruktion?

509. Man konstruiert nach der vorhergehenden Lösung die Asymptoten der Kurve, so werden die Halbierungslinien der Asymptotenwinkel die gesuchten Achsen sein.

510. $J = 2ab$.

511. $J = ab$.

512. $a_1^2 y_1^2 - b_1^2 x_1^2 = -a_1^2 b_1^2$.
Über die Entwickelung des Resultates vergl. die Lösung 312.

513. Geht man von den ursprünglichen Gleichungen aus und führt das neue Koordinatensystem ein, so erhält man

$$y = +\frac{b_1}{a_1}x, \quad y = -\frac{b_1}{a_1}x.$$

514. Die beiden Verlängerungen sind gleich. Der Beweis läßt sich leicht führen, wenn man den der gegebenen Sehne konjugierten Durchmesser zur X-Achse, den der Sehne parallelen Durchmesser zur Y-Achse wählt.

515. Legt man der Untersuchung dasselbe Koordinatensystem zu Grunde wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe, und bezeichnet man den Abschnitt, den die Sekante auf der X-Achse bildet, mit x_1, so findet man, daß der äußere Abschnitt gleich

$$\frac{b_1}{a_1}x_1 - \frac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a_1^2},$$

die ganze Sekante gleich

$$\frac{b_1}{a_1} x_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x_1^2 - a_1^2},$$

demnach das Rechteck aus beiden Strecken

$$\left\{\frac{b_1}{a_1} x_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x_1^2 - a_1^2}\right\} \left\{\frac{b_1}{a_1} x_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x_1^2 - a^2}\right\} = b_1^2$$

ist.

516. Die Resultate stimmen mit den früher gefundenen überein.

517. Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung

$$2xy - 7x + 4y = 0$$

entspricht. Die Asymptoten derselben sind: $x = -2$, $y = \frac{7}{2}$.

518. Sind die beiden Geraden Koordinatenachsen, so ist die Gleichung des Ortes

$$xy \sin\alpha = f^2;$$

derselbe ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten die beiden Geraden sind.

519. Die Teilpunkte liegen auf der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 + x - (y^2 + y) = \frac{9}{4},$$

deren Mittelpunktskoordinaten $x_1 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ sind.

520. Ist $y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1)$ die Gleichung eines Strahles, so sind die Koordinaten des Halbierungspunktes der Sehne

$$\xi = \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha\,(x_1 \operatorname{tg}\alpha - y_1)}{a^2 \operatorname{tg}^2\alpha - b^2}, \quad \eta = \frac{b^2 (x_1 \operatorname{tg}\alpha - y_1)}{a^2 \operatorname{tg}^2\alpha - b^2}.$$

Daraus findet man durch Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\eta = 0,$$

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 - b^2 x_1 \xi + a^2 y_1 \eta = 0.$$

Der geometrische Ort wird also von der X-Achse und einer Hyperbel gebildet. Welches sind die Mittelpunktskoordinaten der Kurve? Wie groß sind die Achsen?

521. Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$a^2y^2 - nb^2x^2 = -na^2b^2$$

entspricht.

522. Man erhält als Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 - kx^2 + kcx = 0.$$

Derselbe ist also eine Hyperbel, deren Achsen c, $c\sqrt{k}$ und deren Mittelpunktskoordinaten $x_1 = \frac{c}{2}$, $y_1 = 0$ sind.

523. Die gesuchte Gleichung ist

$$y^2 - x^2 - 10x = 0.$$

Welches sind die Mittelpunktskoordinaten, welches die Achsen der Hyperbel?

524. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden. Man erhält

$$y = 0, \quad 3x^2 - y^2 - 2cx = 0,$$

wenn der Scheitel des kleineren Winkels im Koordinatenanfangspunkte liegt, im anderen Falle

$$y = 0, \quad 3x^2 - y^2 - 4cx + c^2 = 0.$$

Der Ort der Spitze wird also jedenfalls von der X-Achse und einer Hyperbel gebildet.

525. Eliminiert man aus den Gleichungen

$$y_1^2 = px_1, \quad y_2^2 = px_2,$$
$$2y_1\eta = p(x_1 + \xi), \quad 2y_2\eta = p(x_2 + \xi),$$
$$\cos^2\vartheta = \frac{16y_1^2y_2^2 + 8p^2y_1y_2 + p^4}{16y_1^2y_2^2 + 4p^2(y_1^2 + y_2^2) + p^4}$$

die Größen x_1, x_2, y_1, y_2, so findet man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\eta^2\cos^2\vartheta - \xi^2\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{2}p\xi(1 + \cos^2\vartheta) - \frac{p^2}{16}\sin^2\vartheta = 0.$$

Für $\vartheta = 45^0$ ist der Ort eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung

$$\eta^2 - \xi^2 - \tfrac{3}{2}p\xi - \frac{p^2}{16} = 0$$

entspricht. Dagegen erhält man für $\vartheta = 90^0$:

$$\xi = -\tfrac{1}{4}p,$$

d. h. die Hyperbel degeneriert in die Direktrix der Parabel.

526. Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$y^2 - k^2x^2 - px = 0$$

entspricht.

527. Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises beschreibt eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xy - a \sin \frac{B}{2}\left(x \cos \frac{B}{2} - y \sin \frac{B}{2}\right) = 0$$

ist. (Vergl. Heft I, 1. Aufl. Lösung 170, 2. Aufl. Lösung 208.) Welches sind die Gleichungen der Asymptoten der Kurve?

528. Die Seite c möge mit der X-Achse zusammenfallen und durch die Y-Achse halbiert werden, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$36 d^2 y^2 - 36(c^2 - d^2) x^2 = -d^2 (c^2 - d^2).$$

Wo liegen die Brennpunkte dieser Hyperbel?

529. Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung

$$nxy - my - x + c = 0$$

entspricht. Die Asymptoten derselben sind $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{1}{n}$.

Wird der Scheitel der Parabel in den Koordinatenanfangspunkt verlegt, so nimmt die Gleichung des Ortes die Gestalt

$$nxy - x + c = 0$$

an.

530. $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 - 2ax)$. Wie groß sind die Achsen dieser Hyperbel?

531. Der Schwerpunkt rückt auf der Hyperbel

$$9y^2 = \frac{b^2}{a^2}(9x^2 - 18ax + 8a^2)$$

fort, deren Halbachsen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind.

532. Ist A der Anfangspunkt des Koordinatensystems, so entspricht der von P durchlaufene Weg der Gleichung

$$y^2 - x^2 + ax = 0.$$

Zu bestimmen sind die Lage des Mittelpunktes und die Größe der Achsen der durchlaufenen Hyperbel.

533. Ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, die Koordinaten des Punktes P aber a, 0, so daß $a > r$ ist, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$4(a^2 - r^2) x^2 - 4a(a^2 - r^2) x - 4r^2 y^2 = -(a^2 - r^2)^2.$$

Wie groß sind die Achsen dieser Hyperbel? (Vergl. Lösung 342.)

534. Man erhält:

$$1)\ 4(r_1 - r_2)^2 y^2 - 4\{a^2 - (r_1 - r_2)^2\} x^2 + 4a\{a^2 - (r_1 - r_2)^2\} x = \{a^2 - (r_1 - r_2)^2\}^2,$$

$$2)\ 4(r_1 + r_2)^2 y^2 - 4\{a^2 - (r_1 + r_2)^2\} x^2 + 4a\{a^2 - (r_1 + r_2)^2\} x = \{a^2 - (r_1 + r_2)^2\}^2.$$

Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind die Brennpunkte der Hyperbeln. Wie groß sind die Achsen?

Ist $r_1 = r_2$, so degeneriert die erste der Hyperbeln in die Gerade $x = \frac{a}{2}$. (Vergl. die Lösungen 343 bis 345.)

535. Man erhält zwei gleichseitige Hyperbeln, welche der Gleichung

$$yx = \pm rx \mp r^2$$

entsprechen.

536. Die Gleichungen der beiden Sehnen sind

$$y = (x + r)\operatorname{tg}\alpha, \quad y \operatorname{tg}\alpha = (x - r);$$

demnach erhält man nach Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$ die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 - x^2 = -r^2.$$

537. $y^2 - x^2 + ax = 0.$

538. Die Pole liegen auf der Hyperbel

$$4r^2y^2 - p^2x^2 = -r^2p^2.$$

539. Die Pole liegen auf der gleichseitigen Hyperbel

$$Lxy - Ny = k^2M.$$

540. Man erhält

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 - r_1^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - r_2^2} = d,$$

und daraus

$$4d^2y^2 - 4(a^2 - d^2)x^2 + 4a(a^2 + r_2^2 - r_1^2 - d^2)x = 4d^2r_2^2 + (a^2 + r_2^2 - r_1^2 - d^2)^2.$$

541. Man findet

$$a^2y^2 - (4r^2 - a^2)x^2 - 4ar^2x = a^2r^2.$$

Daraus folgt: Der geometrische Ort ist für $4r^2 > a^2$ eine Hyperbel, für $4r^2 = a^2$ eine Parabel, für $4r^2 < a^2$ eine Ellipse.

542. Die Differenz der Leitstrahlen des Punktes P ist gleich dem Durchmesser des Hauptkreises, der die Gerade F_1F_2 in den Scheiteln schneidet.

543. Vergl. Lösung 349.

544. Man findet leicht zwei Punkte der Peripherie des Hauptkreises.

Determination. Die Lösung ist nur dann möglich, wenn t die Strecke F_1F_2 schneidet und zwar unter einem Winkel, der von 90^0 verschieden ist.

545. Es läßt sich leicht ein zweiter geometrischer Ort für den Brennpunkt F_2 konstruieren.

546 Fällt man von F_1 ein Lot auf a_1, so ist der Fußpunkt des Lotes ein Punkt der Peripherie des Hauptkreises.

Determination. Es ergeben sich zwei Mittelpunkte, also auch zwei Hyperbeln.

547. Fällt man von dem gegebenen Brennpunkt auf die Asymptote und die Tangente Lote, so erhält man zur Konstruktion des Hauptkreises zwei Punkte und die Tangente in einem derselben.

548. Zur Lösung dient der Satz: „Verbindet man einen Brennpunkt eines Kegelschnittes mit den Berührungspunkten zweier Tangenten und mit dem Schnittpunkt derselben, so halbiert die letzte Verbindungslinie den Winkel der beiden ersten.“ Die eine der hier in Betracht kommenden Tangenten ist die Asymptote.

549. Man bestimme zunächst die Lage der Brennpunkte.

Determination. Es lassen sich zwei Hyperbeln konstruieren.

550. Fällt man von F_1 Lote auf die Geraden t_1, t_2, t_3, so sind die Fußpunkte derselben Punkte des Hauptkreises.

Determination. Die Konstruktion läßt sich nur dann ausführen, wenn F_1 außerhalb des Hauptkreises liegt.

551. Vergl. die Lösung 360. Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte läßt sich eine Tangente benutzen.

552. Determination. Es lassen sich zwei verschiedene Hyperbeln konstruieren.

553. Man konstruiere zunächst die Koordinaten des Punktes $P(x_1, y_1)$ und benutze zur Bestimmung der imaginären Achse die Formel $b^2 = \frac{a^2 y_1^2}{x_1^2 - a^2}$. Wann läßt sich die Konstruktion nicht ausführen?

554. Konstruiert man zunächst den Hauptkreis, so lassen sich leicht geometrische Örter für die Brennpunkte finden.

Determination. Die Konstruktion ist nur möglich, wenn die Tangente t von dem Hauptkreise geschnitten wird.

555. Legt man durch P ein Büschel von Strahlen, so kann man mit Hilfe von Lösung 514 beliebig viele Punkte der Hyperbel finden. Derjenige Strahl, welcher im Punkte P halbiert wird, kann zur Bestimmung der Scheitel benutzt werden.

556. Halbiert man den Abschnitt der Tangente, welcher zwischen den beiden Asymptoten liegt, so erhält man einen Punkt der Hyperbel. Über die Fortsetzung der Konstruktion siehe die vorhergehende Lösung.

557. Das Mittel zur Konstruktion bietet die Lösung 492.

558. Man bestimmt durch eine einfache Konstruktion zunächst die Längen der Achsen.

559. Es lassen sich leicht zwei Punkte der zweiten Asymptote finden.

560. Durch das Verhältnis der Achsen ist die Richtung der zweiten Asymptote bestimmt.

561. Verbindet man die beiden Punkte P_1 und P_2 und verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit der Asymptote a_1, so kann man einen Punkt der zweiten Asymptote bestimmen. Über die Fortsetzung der Konstruktion siehe Lösung 555.

562. Mit Hilfe der beiden Geraden P_1P_2, P_2P_3 kann man zwei Punkte der zweiten Asymptote finden.

563. Der Abschnitt von t_3, welcher zwischen t_1 und t_2 liegt, wird von jedem Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen; demnach findet man leicht einen geometrischen Ort der Brennpunkte. Ein zweiter Ort ist die Hauptachse.

564. $J = a^2 \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)$.

Beispiel. 16,4925 ... □.

565. Es sei α der Koordinatenwinkel, den die beiden Asymptoten einschließen, dann ist

$$J = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) \cdot \sin \alpha \cdot \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Beispiel. 28,0318 ... □.

566. Zieht man durch P_1 und P_2 Parallelen zu der einen Asymptote, welche die andere in Q_1 und Q_2 schneiden, so lehrt

eine einfache Betrachtung, daß der Inhalt des Sektors gleich dem der Figur $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ ist, der sich nach der vorhergehenden Lösung leicht bestimmen läßt.

567. Da der den Sehnen konjugierte Durchmesser jedes der Segmente, welches durch eine Sehne abgetrennt wird, halbiert, so ergiebt sich $OP_1Q_1 = OP_2Q_2$.

568. $J = ab \cdot \log \text{nat} \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{a}\right)$.

Beispiel. $J = 24{,}1416 \ldots \square$.

569. $J = \frac{db}{a}\sqrt{d^2 - a^2} - ab \cdot \log \text{nat} \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{a}\right)$.

Beispiel. $J = 15 - \frac{148}{\sqrt{21}} \cdot \log \text{nat} \left(\frac{5\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{148}}\right)$.

570. $J = \frac{2af}{b}\sqrt{f^2 + b^2} + 2ab \cdot \log \text{nat} \left(\frac{f + \sqrt{f^2 + b^2}}{b}\right)$.

571. Der Inhalt eines jeden der vier Flächenstücke ist gleich

$$\frac{a^2 e}{2b} - \frac{ab}{2} \cdot \log \text{nat} \left(\frac{a + e}{b}\right) - \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Die Kurven zweiten Grades.

572. Der gegebenen Gleichung entspricht:

1. α) eine reelle Ellipse,
   β) ein Punkt,
   γ) eine imaginäre Ellipse;
2. α) eine Parabel,
   β) zwei parallele Gerade, welche entweder getrennt liegen oder zusammenfallen und reell oder imaginär sind,
   γ) eine Parabel;
3. α) eine Hyperbel,
   β) zwei sich schneidende Gerade,
   γ) eine Hyperbel.

573. Die Kurven, welche den gegebenen Gleichungen entsprechen, sind:

a) eine imaginäre Ellipse;
b) eine reelle Ellipse;
c) zwei sich schneidende Gerade, deren Gleichungen $x - 3y + 2 = 0$, $2x + y + 5 = 0$ sind;

d) eine Hyperbel;
e) zwei parallele Gerade, deren Gleichungen $3x - 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 9 = 0$ sind;
f) eine Parabel;
g) zwei parallele Gerade, welche zusammenfallen und der Gleichung $5x + 4y + 7 = 0$ entsprechen;
h) ein Punkt;
i) eine Hyperbel;
k) eine Hyperbel;
l) eine reelle Ellipse;
m) eine Hyperbel;
n) ein reeller Punkt, in dem sich die beiden imaginären Geraden $3y - 2ix + 9 + 2i = 0$, $3y + 2ix + 9 - 2i = 0$ durchschneiden;
o) ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten $a = -3$, $b = 2$ und dem Radius $r = 4$.

574. Die Gleichungen der Örter sind:

$$Bx + Cy + E = 0, \quad Ax + By + D = 0.$$

Beispiele. 1. $x + 2y + 3 = 0, \quad 2x + y + 2 = 0;$
2. $5x + 7y + 1 = 0, \quad 3x + 5y + 2 = 0.$

575. Die der Y-Achse parallelen Tangenten sind:

$$x = \frac{CD - BE \pm \sqrt{C\{CD^2 - 2BDE + B^2F - ACF + AE^2\}}}{B^2 - AC},$$

die der X-Achse parallelen:

$$y = \frac{AE - BD \pm \sqrt{A\{CD^2 - 2BDE + B^2F - ACF + AE^2\}}}{B^2 - AC}.$$

Beispiele. 1. $x_1 = -3, \quad x_2 = +\frac{7}{3},$
$y_1 = -4, \quad y_2 = +\frac{4}{3};$

2. $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}, \quad y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{4}.$

576. Da in diesem Falle $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ ist, so müssen die beiden Geraden parallel laufen.

Beispiel. $9x - 3y + 2 = 0, \quad 6x - 2y - 3 = 0.$

577. Mit Hilfe der Lösung 574 findet man die Koordinaten

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & -E \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ -D & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Beispiele. 1. $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$;
2. $x = 2\frac{1}{4}$, $y = -1\frac{3}{4}$;
3. $x = \infty$, $y = \infty$.

578. Die Konstante F muß gleich Null sein.

579. Die Kurve berührt a) die X-Achse, wenn $D^2 - AF = 0$, b) die Y-Achse, wenn $E^2 - CF = 0$ ist.

580. Man erhält:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2(Aa + Bb + D)x_1 + 2(Ba + Cb + E)y_1$$
$$+ Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0.$$

Die drei ersten Konstanten bleiben demnach bei einer Verschiebung des Koordinatensystems unverändert. Welche Regel läßt sich für die Bildung der drei letzten Koeffizienten aufstellen? (Vergl. Lösung 574.)

581. Für das neue Achsensystem lautet die Gleichung:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0,$$

wo

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}$$

ist.

Beispiele. 1. $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 - 5\frac{1}{3} = 0$;
2. $3x_1^2 + 10x_1y_1 + 7y_1^2 + 3\frac{3}{4} = 0$;
3. $3x_1^2 - 4x_1y_1 + 5y_1^2 - 183\frac{4}{11} = 0$.

582. Da in diesem Falle $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ ist, so würde $F_1 = \infty$ sein.

583. Setzt man nach Heft I, 1. Aufl. Lösung 30, 2. Aufl. Lösung 33

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

so erhält man die Größe des Drehungswinkels α durch die Relation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Die Gleichung der Linie nimmt die Gestalt an

$$\tfrac{1}{2}\left\{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right\} x_1^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right\} y_1^2 + K = 0.$$

Die alleinstehende Konstante K erleidet bei der Drehung keine Veränderung.

Beispiele.

1. $\operatorname{tg} 2\alpha = -2$, $\angle \alpha = 58^0 16' 57''$,

$$\tfrac{1}{2}\{17 - 3\sqrt{5}\} x_1^2 + \tfrac{1}{2}\{17 + 3\sqrt{5}\} y_1^2 = 30;$$

2. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{16}{29}$, $\angle \alpha = 14^0 26' 36''$,

$$\tfrac{1}{2}\{-11 - \sqrt{1097}\} x_1^2 + \tfrac{1}{2}\{-11 + \sqrt{1097}\} y_1^2 = 60.$$

584. Es ist $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{C}$; demnach die Gleichung

$$\frac{A^2+B^2}{A} y_1^2 + 2\left(\frac{BD - AE}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) x_1 + 2\left(\frac{AD + BE}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) y_1 + F = 0.$$

Beispiel. $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\angle \alpha = 71^0 33' 54{,}2''$,

$$10\sqrt{10} y_1^2 - 13 x_1 + 9 y_1 + 10\sqrt{10} = 0.$$

585. Die Kurve ist eine Ellipse, deren Achsen

$$2a = \tfrac{1}{11}\sqrt{4034(8 + 2\sqrt{5})},$$
$$2b = \tfrac{1}{11}\sqrt{4034(8 - 2\sqrt{5})}$$

sind.

586. Die Kurve ist eine Hyperbel, deren Achsen

$$2a = \tfrac{2}{5}\sqrt{2(3 + \sqrt{29})},$$
$$2ib = \tfrac{2}{5}\sqrt{2(3 - \sqrt{29})}$$

sind.

587. Es ist

$$e = \frac{1}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \sqrt{-\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\cdot \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}.$$

Beispiel. $2e = 5\frac{1}{3}$.

588. $p = \frac{6}{125}$.

589. Setzt man in der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$x = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta, \quad y = x_1\sin\alpha + y_1\sin\beta,$$

so ergiebt sich

$$(A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha)\, x_1^2 + 2\,(A\cos\alpha\cos\beta + B\sin[\alpha+\beta] + C\sin\alpha\sin\beta)\, x_1 y_1 + (A\cos^2\beta + B\sin 2\beta + C\sin^2\beta)\, y_1^2 + 2\,(D\cos\alpha + E\sin\alpha)\, x_1 + 2\,(D\cos\beta + E\sin\beta)\, y_1 + F = 0.$$

590. Wird die allgemeine Gleichung zweiten Grades durch eine der Konstanten z. B. durch F dividiert, so enthält sie noch fünf Konstante, zu deren Bestimmung fünf Stücke gegeben sein müssen. Sind die gegebenen Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), so erhält man nach Einsetzung derselben in die Gleichung zweiten Grades und nach Elimination von $\frac{A}{F}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}, \frac{E}{F}$ folgende Relation als Gleichung der Linie zweiter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ xy & x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 \\ y^2 & y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

591. In diesem Falle entsprechen der Gleichung zwei gerade Linien; die Gleichung der zweiten Geraden ist

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

592. Da zwischen den drei ersten Koeffizienten die Relation $AC - B^2 = 0$ bestehen muß, so ist es ausreichend, wenn vier Punkte gegeben sind, von denen aber nur je zwei in einer geraden Linie liegen dürfen.

593. Der Punkt durchläuft die Parabel

$$y^2 = 2x.$$

594. Die Linie zweiten Grades besteht aus den beiden Geraden

$$y - 3x + 2 = 0, \quad 8y - 3x + 43 = 0.$$

595. Die Linie ist eine Ellipse, deren Gleichung

$$2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

ist.

596. Die gesuchte Kurve ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$36y^2 - x^2 - 8x = 0$$

entspricht.

597. Zur Bestimmung der Konstanten kann man die Gleichungen

$$AC - B^2 = 0, \quad AF - D^2 = 0, \quad CF - E^2 = 0,$$
$$16A + 8D + F = 0, \quad 9C + 6E + F = 0$$

benutzen. Man findet als Gleichung der Parabel

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0.$$

Der Gleichung

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0,$$

welche sich außerdem ergiebt, entspricht eine Doppelgerade, welche durch die beiden gegebenen Berührungspunkte geht.

598. $3x^2 - 8xy + 5\frac{1}{3}y^2 - 48x - 64y + 192 = 0.$

599. Die Kurve ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$x^2 + 16xy + 4y^2 + 16x - 32y + 64 = 0$$

entspricht.

600. Betrachtet man die beiden Schenkel des Winkels α als Koordinatenachsen und bezeichnet den Abschnitt der Strecke q vom Punkte P bis zum Endpunkte in der Y-Achse mit a, den andern mit b, so erhält die Gleichung der Kurve die Gestalt

$$a^2y^2 - 2ab\cos\alpha \cdot xy + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Der geometrische Ort ist eine Ellipse. Wie groß sind die Achsen derselben? (Vergl. Lösung 326.)

601. Fällt der eine Endpunkt von c mit dem Koordinatenanfangspunkte, c selbst mit dem positiven Teile der X-Achse zusammen und sind f und g die Abschnitte der Seite c, so ist die Gleichung des Ortes

$$4(g-f)^2y^2 - 4\{c^2 - (g-f)^2\}(x^2 - cx) = \{(g-f)^2 - c^2\}^2.$$

Die Spitze beschreibt eine Hyperbel. Wie groß sind die Achsen derselben?

602. Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$2y^2 - 2Myx - 2y_1y + My_1x = 0$$

entspricht.

603. Der Punkt P befindet sich auf der Ellipse

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 2k^2 = 0.$$

Unter welchem Winkel ist die Hauptachse gegen die X-Achse geneigt? Wie groß sind beide Achsen?

604. Man erhält

$$M^2x^2 - 2Myx - M^2y^2 - d^2(1+M^2) = 0,$$

oder

$$M^2x^2 - 2Myx - M^2y^2 + d^2(1+M^2) = 0.$$

Der geometrische Ort ist jedenfalls eine Hyperbel. Bestimme die Richtung der Hauptachse.

605. $Mxy - y^2 + q^2\sqrt{1+M^2} = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, deren Lage sich leicht bestimmen läßt.

606. Die Grundlinie c möge mit dem positiven Teile der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen. Liegt der Scheitel des kleineren Winkels im Koordinatenanfangspunkte, und ist die Tangente der konstanten Winkeldifferenz k, so ergiebt sich

$$kx^2 + 2yx - ky^2 - kcx - cy = 0;$$

liegt dagegen der Scheitel des größeren Winkels im Koordinatenanfangspunkte, so ist die gesuchte Gleichung

$$kx^2 - 2yx - ky^2 - kcx + cy = 0.$$

Der geometrische Ort der Spitze ist in jedem der beiden Fälle eine Hyperbel.

607. Man erhält

$$x^2 - 4xy\cot A + (4\cot^2 A + 1)y^2 = \tfrac{1}{9}a^2,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkte liegt, und deren Achsen den Winkel A und dessen Nebenwinkel halbieren. Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel $\frac{A}{2}$, so ergiebt sich

$$x^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + y^2\cot^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{9}.$$

Wie groß ist das Rechteck aus den Achsen dieser Ellipse?

608. Die Gleichung des Ortes ist

$$\left(2x\sin^2\frac{B}{2} + y\sin B\right)^2 = y\left(8R\sin^2\frac{B}{2} - y\right),$$

d. h. die Kurve ist eine Ellipse, welche im Nullpunkte von der X-Achse berührt wird, und die Y-Achse in der Entfernung

$\dfrac{8R\sin^2\frac{B}{2}}{1+\sin^2 B}$ vom Koordinatenanfangspunkte schneidet. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_1 = -2R\sin B, \quad y_1 = 4R\sin^2\frac{B}{2}.$$

Einfacher gestaltet sich das Resultat, wenn $B = 90^0$ gesetzt wird:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4Ry = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind dann:

$$x_1 = -2R, \quad y_1 = +2R,$$

daher die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4R^2 = 0;$$

die beiden Achsen der Ellipse sind:

$$4R\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-4}}, \quad 4R\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-2}}.$$

609. Es ergiebt sich

$$y^2\sin A - 4y\left(x + 2b\sin^2\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{A}{2} + 4b^2\sin A\sin^4\frac{A}{2} = 0.$$

Der fünfte merkwürdige Punkt bewegt sich auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt $\left(-2b\sin^2\frac{A}{2}, 0\right)$ ist.

Durch Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems erhält man

$$\frac{\left(\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)y^2}{4b^2\sin^4\frac{A}{2}} - \frac{\left(\sin 2\vartheta\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \sin^2\vartheta\right)x^2}{4b^2\sin^4\frac{A}{2}} = -1,$$

wenn $\operatorname{tg} 2\vartheta = 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ ist.

610. Der Höhenpunkt beschreibt eine Hyperbel, deren Gleichung

$$x^2 + Mxy - cx + ny = 0$$

ist. Dreht man die gegebene Gerade um den Punkt $(0, n)$, bis sie der X-Achse parallel läuft, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$x^2 - cx + ny = 0,$$

d. h. der Höhenpunkt beschreibt eine Parabel.

611. Die Endpunkte der Ordinaten liegen auf einer Ellipse; die Gleichung derselben ist

$$x^2 + 2nxy + y^2(1 + n^2) = r^2.$$

Der Neigungswinkel α der Hauptachse der Ellipse zur X-Achse ist bestimmt durch die Relation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2}{n}.$$

612. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist die Resultante der Gleichungen

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{b^2 x_1}{a^2\eta}\operatorname{tg}\alpha + \frac{b^2(\eta - y_1)}{a^2\eta} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{y_1}{\xi - x_1}\operatorname{tg}\alpha + \frac{b^2\xi}{a^2(\xi - x_1)} = 0,$$

nämlich

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2 y_1\eta - b^2 x_1\xi = 0.$$

Wie groß sind die Achsen dieser Ellipse?

613. Der Punkt P beschreibt eine Ellipse, deren Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 - rx = 0$$

ist. Größe und Lage der Achsen sind zu bestimmen.

614. Man erhält die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y_2(y - y_1)(y - y_2) + \{x_2(y - y_1) + y_1 x\}(x - x_2) = 0.$$

Beispiel. $5x^2 + 3xy + y^2 - 30x - 15y + 50 = 0.$

Die Kurve ist eine Ellipse. Bestimme Lage und Größe der Achsen.

615. Der geometrische Ort des Punktes P entspricht der Gleichung

$$y_1 y_3 x^2 - \{a(y_3 - y_1) + x_3 y_1 - x_2 y_3\}xy + x_3(a - x_2)y^2$$
$$- y_1 y_3(x_2 + a)x - x_2 y_1(a - x_3)y + a x_2 y_1 y_3 = 0.$$

(Siehe Fig. 3.)

Beispiel. $10x^2 - 11xy + 8y^2 - 80x + 18y + 150 = 0$.

Richtung und Größe der Hauptachse dieser Ellipse lassen sich leicht finden.

Fig. 3.

616. Der Punkt P beschreibt eine Hyperbel, deren Gleichung

$$18x^2 - 96xy - 41y^2 + 288x + 753y - 1890 = 0$$

ist.

617. Bezeichnet man die Abscisse des Punktes L mit OR, so ist

$$b:y = a + OR : a + x, \quad y : OF = x - a : a, \quad OF : b = OR - a : a,$$

demnach

$$y : b = (x - a)(OR - a) : a^2.$$

Durch Elimination von OR erhält man

$$b^2x^2 - 2abxy - a^2y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Der Punkt P beschreibt demnach eine Hyperbel.

618. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$(a^2 - 4r^2)y^2 - 2a^2ry - 4r^2x^2 + r^2(4r^2 + a^2) = 0.$$

Welche Kurve entspricht dieser Gleichung

1. für $a > 2r$, 2. für $a = 2r$, 3. für $a < 2r$?

619. Die Schnittpunkte sind getrennt und reell, sie fallen zusammen, sind imaginär, wenn

$$(Bn + D)^2 + EM(EM - 2Bn) + 2DM(E + Cn)$$
$$- An(Cn + 2E) - F(A + 2BM + CM^2) \gtreqless 0$$

ist. Jede Kurve zweiten Grades gehört der zweiten Ordnung an, da sie von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten wird.

620. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{6}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-4 \mp \sqrt{61}}{3}.$$

621. Die Schnittpunkte sind imaginär und besitzen die Koordinaten

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-9 \pm i\sqrt{119}}{25}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-32 \mp 2i\sqrt{119}}{25}.$$

622. Die Gleichung ist

$$L_1 L_2 + k L_1' L_2' = 0.$$

Dieselbe ist vom zweiten Grade und gehört demnach einer Linie zweiter Ordnung an. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Kurve durch die betreffenden Schnittpunkte geht.

623. Die gesuchte Gleichung ist

$$\left(\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} - 1\right)\left(\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 1\right) + kxy = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{p_1 p_2} + xy\left(\frac{1}{p_1 q_2} + \frac{1}{p_2 q_1} + k\right) + \frac{y^2}{q_1 q_2} - x\frac{(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} - y\frac{(q_1 + q_2)}{q_1 q_2} + 1 = 0.$$

Soll die Kurve eine Parabel sein, so ist

$$k = -\frac{1}{p_1 q_2} - \frac{1}{p_2 q_1} \pm \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}}$$

zu setzen.

624. $23x^2 + 38xy + 44y^2 - 62x - 164y = 0.$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

625. Es ist $k = -\frac{2}{3}$, demnach die gesuchte Gleichung

$$2x^2 - 33xy - 14y^2 + 20x + 44y - 24 = 0;$$

der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

626. Zur Bestimmung von k erhält man die Relation

$$16k^2 - 6k(3 + 2k) = 0.$$

Für $k = 0$ ergiebt sich das erste Geradenpaar, für $k = 4\frac{1}{2}$ die Ellipse

$$24x^2 + 23xy + 39y^2 - 72x - 81y + 54 = 0.$$

627. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$74x^2 + 340xy + 374y^2 - 375x - 825y + 450 = 0$$

entspricht.

628. Betrachtet man die beiden Sekanten als Koordinatenachsen, so hat die Gleichung der Kurve stets die Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

demnach sind die gesuchten Rechtecke

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{F}{A}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{F}{C},$$

also $x_1 \cdot x_2 : y_1 \cdot y_2 = C : A.$

Bei der angedeuteten Verschiebung bleiben die Konstanten A und C unverändert, also behält auch das Verhältnis denselben Wert.

629. Läuft die X-Achse der Achse der Parabel parallel, so ist die Gleichung derselben

$$2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

also ist

$$x_1 = -\frac{F}{2D}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{F}{C};$$

demnach

$$x_1 : y_1 \cdot y_2 = -C : 2D.$$

Welche Folgerung läßt sich daraus ziehen?

630. Die gesuchte Gleichung ist

$$(CF - E^2)u^2 + 2(DE - BF)uv + (AF - D^2)v^2$$
$$+ 2(BE - CD)u + 2(BD - AE)v + AC - B^2 = 0.$$

631. Zur Aufstellung der Bedingungen benutzt man folgende Sätze:

An die Ellipse lassen sich von jedem Punkte der unendlich fernen Geraden zwei reelle Tangenten ziehen. An eine Hyperbel lassen sich nur von den Punkten der unendlich fernen Geraden, welche außerhalb der Kurve liegen, zwei reelle Tangenten legen. An die Parabel endlich läßt sich von jedem Punkte der unendlich fernen Geraden nur eine einzige ins Endliche gelangende reelle Tangente legen, da die unendlich ferne Gerade selbst eine Tangente der Kurve ist.

Es sei $u - kv = 0$ die Gleichung eines unendlich fernen Punktes. Durch Elimination von u aus dieser und der gegebenen Gleichung erhält man

$$v = \frac{-(D_1k + E_1) \pm \sqrt{(D_1^2 - A_1F_1)k^2 - 2(B_1F_1 - D_1E_1)k + E_1^2 - C_1F_1}}{A_1k^2 + 2B_1k + C_1}.$$

Die Diskriminante der Form unter der Quadratwurzel ist

$$F_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man demnach die Determinante mit Δ, so ergiebt sich:

Der gegebenen Gleichung entspricht

1. eine Ellipse, wenn $F_1 \Delta > 0$ ist,
2. eine Parabel, wenn $F_1 = 0$, $\Delta \gtrless 0$,
3. eine Hyperbel, wenn $F_1 \Delta < 0$ ist.

632. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

633. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & E_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

634. Der Gleichung entsprechen die beiden Punkte
$$3u + 2v + 1 = 0, \quad 7u + v + 1 = 0.$$

635. Der Punkt $5u + 3v + 1 = 0$.

636. Die Enveloppe ist eine Parabel, welche der Gleichung
$$10u^2 + 30uv + 20v^2 - 3u + 9v = 0$$
entspricht.

637. $$k^2u^2 - a^2uv + k^2v^2 - au - av - 1 = 0.$$
Die Kurve ist eine Ellipse.

638. Man erhält
$$4u^2 + 140uv + 600v^2 + 11u + 130v + 5 = 0.$$
Die Enveloppe ist demnach eine Ellipse.

Wie gestaltet sich das Resultat, wenn P innerhalb des stumpfen Winkels liegt, der von den beiden Geraden gebildet wird?

639. Die Gleichung der Enveloppe ist
$$\delta u^2 - \delta uv + \delta v^2 + u = 0;$$
die Tangenten des Kreisbüschels werden also von einer Parabel eingehüllt.

640. Es ergiebt sich als Gleichung der Einhüllenden
$$r^2u^2 + (r^2 - k^2)v^2 - 1 = 0,$$
d. h. die Lote werden für $k > r$ von einer Hyperbel, für $k < r$ von einer Ellipse eingehüllt. Dagegen bilden dieselben für $k = r$ zwei Büschel, deren Mittelpunkte $(r, 0)$ und $(-r, 0)$ sind.

641. Die Polaren des Punktes P werden von einer Parabel eingehüllt, deren Gleichung
$$e^2uv - y_1u + x_1v = 0$$
ist.

642. Die Enveloppe der Tangenten ist eine Parabel, welche der Gleichung

$$2uv + 2v^2 + u - v = 0$$

entspricht.

643. Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind:

$$y = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}x, \quad y = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}x.$$

644. Durch Vergleichung der Lösungen 572 und 643 findet man:

Die Ellipse hat zwei imaginäre unendlich ferne Punkte, die Parabel hat einen einzigen reellen unendlich fernen Punkt, die Hyperbel endlich besitzt zwei reelle unendlich ferne Punkte.

645. Bezeichnen wir die Koordinaten eines Teilungspunktes mit x, y, so ist

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung des Kegelschnittes erhält man

$$U_{22}k^2 - 2U_{12}k + U_{11} = 0,$$

worin

$$U_{11} = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F,$$
$$U_{12} = (Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + Cy_1 + E)y_2 + Dx_1 + Ey_1 + F,$$
$$U_{22} = Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F$$

ist. Entwickelt man aus dieser Gleichung die beiden Wurzeln k_1 und k_2 und setzt diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die Koordinaten der Punkte, in denen die Gerade P_1P_2 von dem Kegelschnitte geschnitten wird.

646. Auflösung I. Verlegt man in der vorhergehenden Lösung die beiden Punkte P_1 und P_2 auf den Kegelschnitt selbst, und zwar so, daß beide unendlich nahe aneinander liegen, so wird $U_{11} = 0$ und $U_{22} = 0$. Es muß demnach auch $U_{12} = 0$ werden, d. h. jeder Punkt, dessen Koordinaten der Gleichung $U_{12} = 0$ genügen, muß auf der Tangente am Punkte (x_1y_1) des Kegelschnittes liegen. Die Gleichung der Tangente ist sonach

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Auflösung II. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte des Kegelschnittes, so ist die Richtungskonstante ihrer Verbindungslinie

$$-\frac{A(x_1 + x_2) + B(y_1 + y_2) + 2D}{B(x_1 + x_2) + C(y_1 + y_2) + 2E}.$$

Läßt man die beiden Punkte unendlich nahe aneinander rücken, so daß die Sehne in die Tangente übergeht, so erhält man als Gleichung derselben

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E}(x - x_1),$$

die sich leicht in die vorhergefundene Form überführen läßt.

Beispiel. $3x + y - 3 = 0$.

647. Man nimmt auf dem Kegelschnitte die Punkte A, B, C, D an und zieht die Verbindungslinien zwischen je zwei aufeinander folgenden. Verlängert man nun AB und DP bis zum Schnitt in L, PA und CD bis zum Schnitt in M, endlich BC bis zum Schnitt mit LM in N, so ist N ein zweiter Punkt der Tangente, also PN die gesuchte Tangente. (Siehe Lehrsatz des Pascal.)

648. Die in Aufgabe und Lösung 645 betrachtete Sekante des Kegelschnittes ist eine Tangente der Kurve, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung

$$U_{22}k^2 - 2U_{12}k + U_{11} = 0$$

gleich sind, d. h. wenn

$$U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$$

ist. Genügen also die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Gleichung, wenn sie an Stelle von x_2, y_2 eingesetzt werden, so liegt derselbe auf einer von dem Punkte P (x_1, y_1) an den Kegelschnitt gelegten Tangente. Das System der Tangenten, die sich von (x_1, y_1) an den Kegelschnitt legen lassen, entspricht also der Gleichung:

$$(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F)(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)$$
$$-\{(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F\}^2 = 0.$$

Man erhält demnach zwei Tangenten, welche entweder reell oder imaginär sein können. Die Kegelschnitte gehören der zweiten Klasse an.

649. Die beiden Tangenten sind imaginär und entsprechen den Gleichungen

$$4x + (3 - 2i\sqrt{3})y = 0, \quad 4x + (3 + 2i\sqrt{3})y = 0.$$

650. $38y - (79 + 3\sqrt{1407})x - 76 = 0,$

$38y - (79 - 3\sqrt{1407})x - 76 = 0.$

651. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-F\Delta}}{F(A+C)-(D^2+E^2)}$,

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

ist.

652. Zur Bestimmung der Konstanten des Kegelschnittes erhält man folgende Gleichungen:

$$L_1^2(CF-E^2)+M_1^2(AF-D^2)+N_1^2(AC-B^2)+2M_1N_1(BD-AE) + 2L_1N_1(BE-CD)+2L_1M_1(ED-BF)=0,$$
$$L_2^2(CF-E^2)+M_2^2(AF-D^2)+N_2^2(AC-B^2)+2M_2N_2(BD-AE) + 2L_2N_2(BE-CD)+2L_2M_2(ED-BF)=0,$$
$$L_3^2(CF-E^2)+M_3^2(AF-D^2)+N_3^2(AC-B^2)+2M_3N_3(BD-AE) + 2L_3N_3(BE-CD)+2L_3M_3(ED-BF)=0,$$
$$L_4^2(CF-E^2)+M_4^2(AF-D^2)+N_4^2(AC-B^2)+2M_4N_4(BD-AE) + 2L_4N_4(BE-CD)+2L_4M_4(ED-BF)=0,$$
$$L_5^2(CF-E^2)+M_5^2(AF-D^2)+N_5^2(AC-B^2)+2M_5N_5(BD-AE) + 2L_5N_5(BE-CD)+2L_5M_5(ED-BF)=0.$$

Entwickelt man aus diesen die Verhältnisse der Determinanten $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$ u. s. f., so kann man mit Hilfe derselben leicht die Quotienten $\frac{A}{F}, \frac{B}{F}\cdots$ finden.

653. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$169x^2+172xy+4y^2-156x+24y+36=0$$

entspricht.

654. Die Asymptoten entsprechen der Gleichung

$$Ax+(B\mp\sqrt{B^2-AC})y+D\pm\frac{AE-BD}{\sqrt{B^2-AC}}=0.$$

Man ersieht sofort, daß die Asymptoten der Hyperbel reell, die der Ellipse imaginär sind, daß endlich die der Parabel in der Unendlichkeit liegen.

Beispiele. 1. $4x+(1\mp\sqrt{5})y+3\pm\frac{1}{\sqrt{5}}=0$;

2. $3x-(2\pm i\sqrt{11})y-15\pm\frac{54i}{\sqrt{11}}=0$.

655. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & -E \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ -D & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Der Schnittpunkt fällt also mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen. (Vergl. Lösung 577.)

656. Man erhält

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}.$$

Beispiel. $\operatorname{tg} \varphi = 2$; $\angle \varphi = 63^0\, 26'\, 5{,}8''$.

657. Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes mit x_0, y_0, so erhält man:

$$y - y_0 = \frac{-A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}(x - x_0).$$

Die Halbierungslinien sind reell, auch wenn die Asymptoten imaginär sind, und fallen mit den Achsen zusammen.

Beispiel. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse; die Gleichungen der reellen Halbierungslinien sind:

$$y - x + 1 = 0, \quad 3y + 3x + 5 = 0.$$

658. Die Gleichung der Polare ist

$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Läßt man den Pol mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Setzt man für x_1 und y_1 die in Lösung 577 entwickelten Mittelpunktskoordinaten ein, so erhält man

$$\text{Const} = 0,$$

d. h. die Polare fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

Beispiel. $38x - 37y - 22 = 0$.

659. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L & M & N \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad y_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ L & M & N \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

wo $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ L & M & N \end{vmatrix}$ ist.

Beispiel. $x_1 = -4$, $y_1 = -7$.

660. Da in diesem Falle $\Delta = 0$ ist, so folgt, daß der Mittelpunkt in unendlicher Ferne liegt.

661. Führt man Linienkoordinaten ein, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} A & B & D \\ L & M & N \\ D & E & F \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Die Polaren gehen also alle durch den Pol der Geraden $Lx + My + N = 0$. (Vergl. Lösung 659.)

662. Aus der vorigen Lösung schließt man, daß die Pole der Strahlen auf der Polare des Mittelpunktes des Büschels liegen.

663. Nach Lösung 645 ist das Verhältnis der Abschnitte, in welche die Strecke PQ durch den Kegelschnitt geteilt wird, bestimmt durch die Gleichung

$$U_{22} k^2 - 2 U_{12} k + U_{11} = 0.$$

Soll die Teilung eine harmonische sein, so muß $\frac{k_1}{k_2} = -1$ sein. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$U_{12} \equiv (Ax_1 + By_1 + D) x_2 + (Bx_1 + Cy_1 + E) y_2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

ist. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes Q mit x, y, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$(Ax_1 + By_1 + D) x + (Bx_1 + Cy_1 + E) y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Der geometrische Ort des Punktes Q ist also die Polare des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes. Welcher Satz ergiebt sich daraus?

664. Sind

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0, \quad ux_2 + vy_2 + 1 = 0, \quad u \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} + v \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} + 1 = 0,$$

$$u \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} + v \frac{y_1 + ky_2}{1 + k} + 1 = 0$$

die Gleichungen der vier harmonischen Punkte auf der Geraden g, so sind die der zugehörigen Polaren:

$$(Ax_1 + By_1 + D) x + (Bx_1 + Cy_1 + E) y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$
$$(Ax_2 + By_2 + D) x + (Bx_2 + Cy_2 + E) y + Dx_2 + Ey_2 + F = 0,$$
$$(Ax_1 + By_1 + D) x + (Bx_1 + Cy_1 + E) y + Dx_1 + Ey_1 + F$$
$$- k\{(Ax_2 + By_2 + D) x + (Bx_2 + Cy_2 + E) y + Dx_2 + Ey_2 + F\} = 0,$$
$$(Ax_1 + By_1 + D) x + (Bx_1 + Cy_1 + E) y + Dx_1 + Ey_1 + F$$
$$+ k\{(Ax_2 + By_2 + D) x + (Bx_2 + Cy_2 + E) y + Dx_2 + Ey_2 + F\} = 0.$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist gleich -1, das Büschel also ein harmonisches.

665. Man zieht von dem Punkte P zwei Sekanten S_1 und S_2 in den Kegelschnitt. K möge von S_1 in A und B, von S_2 in C und D geschnitten werden. Verbindet man diese Schnittpunkte, so daß sich AD und BC in R, ferner AC und BD in S schneiden, und zieht endlich die Gerade RS, so ist diese die gesuchte Polare. (Vergl. Lösung 663, und Heft I, 1. Aufl. Aufgabe und Lösung 298, 2. Aufl. Nr. 346.)

666. Man bestimmt nach der vorigen Lösung zu zwei beliebigen Punkten L und M der Geraden g die Polaren p_1 und p_2 bezüglich des Kegelschnittes, dann wird der Schnittpunkt P der beiden Geraden p_1 und p_2 der gesuchte Pol sein.

667. Nach Lösung 665 konstruiert man zunächst die Polare p des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes K. Sind F und H die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Polare, so sind PF und PH die gesuchten Tangenten. Welche Fälle sind hier zu unterscheiden?

668. Man verlängert die Verbindungslinie je zweier Punkte bis zum Schnitt mit der Tangente und bestimmt den diesem Schnittpunkte zugeordneten harmonischen Punkt, dann läßt sich die Konstruktion mit Hilfe der vorhergehenden Lösungen leicht zu Ende führen.

669. Es existiert ein System von Kegelschnitten, welche der Anforderung genügen. Die Gleichung dieses Systems ist

$$L_1 L_2 + k L_3{}^2 = 0.$$

670. $121x^2 + 1254xy + 3249y^2 - 12822x - 5274y$
$- 30663 = 0.$

671. Es ist $k = 6$, demnach die gesuchte Gleichung

$$8x^2 + 9xy + 7y^2 - 8x + 13y = 0.$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

672. Da k in diesem Falle gleich $-\frac{1}{2000}$ ist, so ergiebt sich

$$2025x^2 + 2020xy - 3996y^2 + 9900x + 7960y + 12100 = 0.$$

Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

673. Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten, $L_3 = 0$ die der Polare, so entspricht der Kegelschnitt der Gleichung $L_1 L_2 + k L_3^2 = 0$. Mit Hilfe dieser Relation findet man leicht

$$d_1 \cdot d_2 : d_3^2 = -k(L_3^2 + M_3^2) : \sqrt{L_1^2 + M_1^2} \cdot \sqrt{L_2^2 + M_2^2}.$$

Das Verhältnis ist ein konstantes.

674. Ist die von dem Koordinatenanfangspunkte nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Gerade gegen die X-Achse unter dem Winkel φ geneigt, so ist die Gleichung der Polare

$$x(A\cos\varphi + B\sin\varphi) + y(B\cos\varphi + C\sin\varphi) + D\cos\varphi + E\sin\varphi = 0.$$

Jede Sehne des Kegelschnittes, deren Richtungskonstante $\operatorname{tg}\varphi$ ist, wird durch die Polare halbiert. (Vergl. Lösung 663.)

675. Die Gleichung des Durchmessers läßt sich auch in die Form

$$\cos\varphi\,(Ax + By + D) + \sin\varphi\,(Bx + Cy + E) = 0$$

bringen. Die Durchmesser gehen demnach alle durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$Ax + By + D = 0, \qquad Bx + Cy + E = 0,$$

d. h. durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes. (Vergl. Lösung 577.)

676. $(B + CM)(y - y_0) + (A + BM)(x - x_0) = 0.$

677. Mit Hilfe der Lösung 654 findet man leicht, daß in jeder Asymptote zwei konjugierte Durchmesser zusammenfallen.

678. $y - y_0 = \dfrac{-(A - C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}(x - x_0).$

(Vergl. Lösung 657.)

679. Die beiden Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten; dieselben sind entweder alle reell, oder alle imaginär, oder zwei derselben sind reell, die andern beiden imaginär. Alle Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte hindurchgehen, entsprechen der Gleichung $U_1 + kU_2 = 0$, in der k ein variabler Parameter ist. Diese Kurven bilden ein Kegelschnittbüschel, sie können auch dann noch reell sein, wenn die Schnittpunkte der Fundamentalkurven imaginär sind.

680. Zur Bestimmung des Parameters k dient die Gleichung

$$(A_1 + kA_2)(C_1 + kC_2) - (B_1 + kB_2)^2 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind reell, gleich, imaginär, je nachdem

$$\left\{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}\right\}^2 - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

ist.

Beispiel.

$$(11 \pm 3\sqrt{13})\, x^2 + (10 \pm 2\sqrt{13})\, xy + (7 \mp \sqrt{13})\, y^2$$
$$+ (24 \pm 8\sqrt{13})\, x + (34 \pm 10\sqrt{13})\, y - 10 \pm 14\sqrt{13} = 0.$$

681. Soll der Gleichung $U_1 + k U_2 = 0$ ein Geradenpaar entsprechen, so müssen die Konstanten derselben der Relation

$$\begin{vmatrix} A_1 + kA_2 & B_1 + kB_2 & D_1 + kD_2 \\ B_1 + kB_2 & C_1 + kC_2 & E_1 + kE_2 \\ D_1 + kD_2 & E_1 + kE_2 & F_1 + kF_2 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Da diese Gleichung in Bezug auf k vom dritten Grade ist, so werden also im allgemeinen drei, mindestens aber ein reelles Geradenpaar zu dem Kegelschnittbüschel gehören. Bezeichnen wir

$$\begin{vmatrix} A_1 + kA_2 & B_1 + kB_2 \\ B_1 + kB_2 & C_1 + kC_2 \end{vmatrix}$$

mit $\varDelta$, so folgt:

Ist für eine Wurzel k der kubischen Gleichung $\varDelta$ größer als Null, so ist das Geradenpaar imaginär, der Schnittpunkt desselben (Chordalpunkt) aber reell. Für $\varDelta = 0$ sind die beiden Geraden parallel, liegen getrennt oder fallen zusammen, können reell oder imaginär sein. Ist endlich $\varDelta < 0$, so sind die beiden Geraden reell und schneiden sich. Die Geradenpaare sind entweder reelle oder ideelle gemeinsame Sehnen der Kegelschnitte des Büschels.

682. Zu dem Büschel gehören drei reelle Geradenpaare, welche den Gleichungen

$$\begin{cases} 4y + x - 5 = 0, \\ 3y - x - 9 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2x + 5 = 0, \\ 2y + 3x - 4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30y - 25x - 24 = 0, \\ 47y + 32x - 115 = 0 \end{cases}$$

entsprechen.

683. $$\begin{vmatrix} A_1 - C_1 & A_2 - C_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

684. Der Parameter eines Kegelschnitts, welcher von der X-Achse berührt wird, muß der Relation

$$(A_1 + kA_2)(F_1 + kF_2) - (D_1 + kD_2)^2 = 0,$$

dagegen der eines Kegelschnitts, welcher von der Y-Achse berührt wird, der Gleichung

$$(C_1 + kC_2)(F_1 + kF_2) - (E_1 + kE_2)^2 = 0$$

genügen. In einem Kegelschnittbüschel werden demnach im allgemeinen zwei Kurven von der X-Achse und zwei von der Y-Achse berührt.

685. Das Koordinatensystem wählt man am besten wie in Heft I, 1. Aufl. Aufg. 170, 2. Aufl. Aufg. 208. Es zeigt sich dann leicht, daß je zwei Asymptoten aufeinander senkrecht stehen: das Büschel besteht also aus lauter gleichseitigen Hyperbeln. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte ist ein Kreis, der die Seiten des Dreiecks halbiert: der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks.

686. Die in Lösung 574 entwickelten Gleichungen der Örter nehmen in diesem Falle die Gestalt an

$$(A_1 + kA_2)x + (B_1 + kB_2)y + D_1 + kD_2 = 0,$$
$$(B_1 + kB_2)x + (C_1 + kC_2)y + E_1 + kE_2 = 0;$$

daraus ergiebt sich durch Elimination des variabeln Parameters k die Gleichung des Ortes

$$(A_1x + B_1y + D_1)(B_2x + C_2y + E_2)$$
$$- (A_2x + B_2y + D_2)(B_1x + C_1y + E_1) = 0.$$

Die Mittelpunkte aller Kurven des Büschels liegen demnach auf einem Kegelschnitte.

Beispiel. $11x^2 - 23xy - 3y^2 + 26x + 6y + 9 = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

687. Das System der Polaren entspricht der Gleichung

$$\{(A_1 + kA_2)x_1 + (B_1 + kB_2)y_1 + (D_1 + kD_2)\}x$$
$$+ \{(B_1 + kB_2)x_1 + (C_1 + kC_2)y_1 + E_1 + kE_2\}y$$
$$+ (D_1 + kD_2)x_1 + (E_1 + kE_2)y_1 + F_1 + kF_2 = 0$$

oder

$$(A_1x_1 + B_1y_1 + D_1)x + (B_1x_1 + C_1y_1 + E_1)y$$
$$+ D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 + k\{(A_2x_1 + B_2y_1 + D_2)x$$
$$+ (B_2x_1 + C_2y_1 + E_2)y + D_2x_1 + E_2y_1 + F_2\} = 0.$$

Die Polaren des Punktes P bezüglich der Kegelschnitte des Büschels gehen also alle durch einen Punkt Q, d. h. sie bilden selbst ein Büschel. Das Punktepaar P, Q wird ein Polenpaar genannt.

688. Bestimmt man die beiden Punkte, welche die Sehnen der Fundamentalkurven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ harmonisch teilen, so bilden dieselben bezüglich der Kegelschnitte des Büschels ein Polenpaar und sind demnach die Doppelpunkte der Involution.

689. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$\begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + D_1 & B_1 x + C_1 y + E_1 & D_1 x + E_1 y + F_1 \\ A_2 x + B_2 y + D_2 & B_2 x + C_2 y + E_2 & D_2 x + E_2 y + F_2 \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. die Pole der gegebenen Geraden liegen auf einem Kegelschnitte. Wie läßt sich nachweisen, daß dieser Kegelschnitt durch den Schnittpunkt jedes Geradenpaares geht, welches zu dem Büschel gehört?

Beispiel. $5x^2 + 19xy - 11y^2 - 66x + 38y - 71 = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

690. Ist die Y-Achse eine gemeinsame Sehne des Büschels, so entspricht das letztere der Gleichung

$$\begin{gathered}(A_1 + kA_2)\, x^2 + 2\,(B_1 + kB_2)\, xy + C_1\,(1 + k)\, y^2 \\ + 2\,(D_1 + kD_2)\, x + F_1\,(1 + k) = 0.\end{gathered}$$

Die Gleichung des geometrischen Ortes nimmt in diesem Falle die Gestalt

$$x\,\{\,(B_1 D_2 - B_2 D_1)\, x + C_1\,(D_2 - D_1)\, y + F_1\,(B_1 - B_2)\,\} = 0$$

an.

Die Pole liegen also auf einem Geradenpaare, und zwar ist eine dieser Geraden die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte des Büschels.

691. Die Gleichung des Büschels ist

$$U_1 + kL_1 L_2 = 0.$$

692. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel und entspricht der Gleichung

$$78x^2 - 5xy - 14y^2 - 111x - 2y = 0.$$

693. Die Gleichung des Kegelschnittbüschels ist

$$U_1 + kL_1 L_2 = 0.$$

Ist statt der beiden Tangenten die Berührungssehne $L_3 = 0$ gegeben, so erhält man als Gleichung des Büschels

$$U_1 + kL_3^2 = 0.$$

694. Zur Bestimmung des Parameters k ergiebt sich die Relation

$$\begin{vmatrix} 3 + 25k & 1 - 5k \\ 1 - 5k & k - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus folgt: $k = -\frac{1}{3}$. Die Gleichung der Parabel ist sonach

$$8x^2 - 8xy + 2y^2 - 22x - 13y - 19 = 0.$$

695. Der gemeinsame Mittelpunkt sei der Koordinatenanfangspunkt, die gemeinsame Tangente im Punkte P (a, b) sei $x = a$. Dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$xy = ab.$$

Die Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch P geht, O zum Mittelpunkt hat, und deren eine Asymptote der gemeinsamen Tangente des Systems parallel ist.

696. Determination. Liegt der Schnittpunkt von t und F_1F_2 zwischen den Brennpunkten, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt er dagegen auf der Verlängerung der Verbindungslinie, so ist die Kurve eine Ellipse. Läßt man den einen Brennpunkt in die Unendlichkeit rücken, so erhält man eine Parabel.

697. Determination. Man findet eine Ellipse und eine Hyperbel, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Jede dieser beiden Kurven geht in eine Parabel über, wenn man einen der Brennpunkte in unendliche Ferne verlegt.

698. Determination. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn der Punkt F_1 innerhalb des leicht zu konstruierenden Hauptkreises, eine Hyperbel, wenn er außerhalb desselben liegt. Dagegen ist er eine Parabel, wenn die Fußpunkte der von F_1 auf t_1, t_2, t_3 gefällten Lote auf einer Geraden liegen.

699. Man fällt von F_1 Lote auf t_1 und t_2, beschreibt über F_1P als Durchmesser einen Kreis und konstruiert sodann einen zweiten Kreis, welcher durch die Fußpunkte der Lote geht und den ersten Kreis berührt. Der zweite Kreis ist der Hauptkreis des gesuchten Kegelschnittes. Es ergeben sich zwei Lösungen.

700. Der Hauptkreis des gesuchten Kegelschnittes geht durch den Fußpunkt des von F_1 auf t_1 gefällten Lotes und berührt die

beiden über F_1P_1 und F_1P_2 als Durchmesser beschriebenen Kreise. Da sich die beiden Hilfskreise durchschneiden, so erhält man nur zwei Lösungen.

701. Die über F_1P_1, F_1P_2, F_1P_3 als Durchmesser beschriebenen Kreise werden von dem Hauptkreise des gesuchten Kegelschnittes berührt. Im allgemeinen erhält man vier Lösungen.

702. Man findet leicht zwei geometrische Örter für den Mittelpunkt des Hauptkreises des Kegelschnittes. Es ergiebt sich nur eine Lösung. Von der Lage des Mittelpunktes hängt es ab, ob der zu konstruierende Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist.

703. Determination. Es ergiebt sich nur eine Lösung.

704. Determination. Man erhält zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln, welche den gestellten Anforderungen genügen.

705. Als geometrische Örter des zweiten Brennpunktes F_2 lassen sich zwei gerade Linien ziehen. Es läßt sich also nur ein Kegelschnitt konstruieren. Ob dieser Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist, hängt von der Lage des Punktes F_2 zu den gegebenen Stücken ab.

706. Der Abschnitt der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit der Direktrix erscheint von dem gesuchten Brennpunkte aus gesehen unter rechtem Winkel. Da sich außerdem die Abstände der Punkte P und P_1 von d_1 wie die Entfernungen dieser Punkte von dem Brennpunkte verhalten, so ergeben sich zwei Kreise als geometrische Örter des Brennpunktes. Im allgemeinen sind demnach zwei Lösungen möglich.

707. Geometrische Örter des der Direktrix d_1 zugehörigen Brennpunktes lassen sich nach der vorhergehenden Lösung leicht finden.

708. Ist S der Schnittpunkt der beiden Geraden p und d, so erscheint die Strecke PS von dem zu d gehörigen Brennpunkte aus gesehen unter rechtem Winkel. Da die Richtung der Achse bekannt ist, so hat man zur Bestimmung dieses Brennpunktes zwei geometrische Örter. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen. Die Art der Kurven wird durch die Lage der gefundenen Brennpunkte bestimmt.

709. Zieht man die Gerade PP_1, welche p_1 in S schneiden möge, so findet man leicht einen Punkt P_2, der mit P die Strecke P_1S harmonisch teilt. Dieser Punkt P_2 gehört dem gesuchten Kegelschnitte an. Über die geometrischen Örter des der gegebenen Direktrix zugehörigen Brennpunktes siehe die Lösungen 706 und 708. Im allgemeinen ergeben sich zwei Lösungen.

710a. Der Schnittpunkt der Sehnen P_1P_2 und P_4P_5 sei Q. Man legt durch P_1 einen Strahl s, der die Verlängerung von P_3P_4 in R schneidet, zieht die Gerade QR, welche P_2P_3 in S treffen möge. Verbindet man nun P_5 und S, so schneidet diese Linie den Strahl s in einem sechsten Punkte des Kegelschnittes. (Siehe Lehrsatz des Pascal.)

710b. Läßt man den Strahl s, dessen Richtung beliebig war, einmal P_2P_3, das andere Mal P_4P_5 parallel laufen, so erhält man in beiden Fällen parallele Sehnen des Kegelschnittes, mit deren Hilfe sich geometrische Örter des Mittelpunktes konstruieren lassen.

711. Die Konstruktion ist durch wiederholte Anwendung der Lösung 647 auszuführen.

712. Man zieht die Gerade P_1P_2, welche t in A schneiden möge. Legt man sodann durch A einen beliebigen Strahl s, welcher die Verlängerung von P_2P_3 in B, die von P_3P_4 in C trifft, so schneiden sich die Verbindungslinien BP_4 und CP_1 in einem fünften Punkte des Kegelschnittes.

713. Die Lösung erhellt aus Nr. 712, da durch die Richtung einer Asymptote ein unendlich ferner Punkt der Kurve gegeben ist.

714. Die Tangente t_1 möge die Verlängerung von P_2P_3 in A, ferner möge die Tangente t_2 die Verlängerung von P_3P_1 in B schneiden, dann trifft die Gerade P_1P_2 die Verbindungslinie AB in einem zweiten Punkte der gesuchten Tangente.

715. Wir bezeichnen den Durchschnittspunkt von t_1 und t_2 mit P_1, den von t_2 und t_3 mit P_2, den von t_3 und t_4 mit P_3 u. s. f. Sodann nehmen wir auf t_5 einen Punkt M an und ziehen MP_2, ferner P_1P_4. Ist N der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, so verbinden wir P_3 mit N und verlängern diese bis zum Schnitt mit t_1 in L, dann ist LM die gesuchte Tangente.

716. Die Bezeichnung der Schnittpunkte der Tangenten sei dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung. Die beiden Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4 mögen sich im Punkte N schneiden. Verbinden

wir N mit P_5, so trifft die Verlängerung dieser Verbindungslinie die Tangente t_3 in dem Berührungspunkte derselben.

717. Man bestimmt zunächst nach der vorhergehenden Lösung die Berührungspunkte der Tangenten und findet mit Hilfe derselben nach Lösung 710b leicht den Mittelpunkt des Kegelschnittes.

718. Konstruiert man mit Hilfe der gegebenen Stücke ein Tangentensechseck, so lassen sich leicht beliebig viele andere Tangenten, sowie die Berührungspunkte derselben finden.

719. Es mögen sich t_1 und t_2 in C, t_2 und t_3 in A, t_3 und t_1 in B schneiden. Man verbinde A mit P_1, B mit P_2 und den Schnittpunkt M dieser beiden Transversalen mit C, so trifft die Verlängerung dieser Verbindungslinie t_3 in dem gesuchten Berührungspunkte.

720. Schneiden sich t_1 und t_2 in A, t_2 und t_3 in B, t_3 und t_4 in C, so ziehe man CP_1, ferner durch A einen beliebigen Strahl, der CP_1 in H, t_4 in D schneidet, dann BH, welches t_1 in E trifft. Die Verbindungslinie ED ist eine fünfte Tangente des Kegelschnitts.

721. Die Konstruktion folgt aus Lösung 685: Die Feuerbachschen Kreise der Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_2P_3P_4$ dienen als geometrische Örter zur Konstruktion des Mittelpunktes. Neue Punkte der Hyperbel findet man als Höhenpunkte der Dreiecke.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.